



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Esta é uma cópia digital de um livro que foi preservado por gerações em prateleiras de bibliotecas até ser cuidadosamente digitalizado pelo Google, como parte de um projeto que visa disponibilizar livros do mundo todo na Internet.

O livro sobreviveu tempo suficiente para que os direitos autorais expirassem e ele se tornasse então parte do domínio público. Um livro de domínio público é aquele que nunca esteve sujeito a direitos autorais ou cujos direitos autorais expiraram. A condição de domínio público de um livro pode variar de país para país. Os livros de domínio público são as nossas portas de acesso ao passado e representam uma grande riqueza histórica, cultural e de conhecimentos, normalmente difíceis de serem descobertos.

As marcas, observações e outras notas nas margens do volume original aparecerão neste arquivo um reflexo da longa jornada pela qual o livro passou: do editor à biblioteca, e finalmente até você.

Diretrizes de uso

O Google se orgulha de realizar parcerias com bibliotecas para digitalizar materiais de domínio público e torná-los amplamente acessíveis. Os livros de domínio público pertencem ao público, e nós meramente os preservamos. No entanto, esse trabalho é dispendioso; sendo assim, para continuar a oferecer este recurso, formulamos algumas etapas visando evitar o abuso por partes comerciais, incluindo o estabelecimento de restrições técnicas nas consultas automatizadas.

Pedimos que você:

- Faça somente uso não comercial dos arquivos.
A Pesquisa de Livros do Google foi projetada para o uso individual, e nós solicitamos que você use estes arquivos para fins pessoais e não comerciais.
- Evite consultas automatizadas.
Não envie consultas automatizadas de qualquer espécie ao sistema do Google. Se você estiver realizando pesquisas sobre tradução automática, reconhecimento óptico de caracteres ou outras áreas para as quais o acesso a uma grande quantidade de texto for útil, entre em contato conosco. Incentivamos o uso de materiais de domínio público para esses fins e talvez possamos ajudar.
- Mantenha a atribuição.
A "marca d'água" que você vê em cada um dos arquivos é essencial para informar as pessoas sobre este projeto e ajudá-las a encontrar outros materiais através da Pesquisa de Livros do Google. Não a remova.
- Mantenha os padrões legais.
Independentemente do que você usar, tenha em mente que é responsável por garantir que o que está fazendo esteja dentro da lei. Não presuma que, só porque acreditamos que um livro é de domínio público para os usuários dos Estados Unidos, a obra será de domínio público para usuários de outros países. A condição dos direitos autorais de um livro varia de país para país, e nós não podemos oferecer orientação sobre a permissão ou não de determinado uso de um livro em específico. Lembramos que o fato de o livro aparecer na Pesquisa de Livros do Google não significa que ele pode ser usado de qualquer maneira em qualquer lugar do mundo. As consequências pela violação de direitos autorais podem ser graves.

Sobre a Pesquisa de Livros do Google

A missão do Google é organizar as informações de todo o mundo e torná-las úteis e acessíveis. A Pesquisa de Livros do Google ajuda os leitores a descobrir livros do mundo todo ao mesmo tempo em que ajuda os autores e editores a alcançar novos públicos. Você pode pesquisar o texto integral deste livro na web, em <http://books.google.com/>

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

AAT2332

UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 08/27/93 CC STAT mm E/L 1

010: : |a 05018659

035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B56849

035/2: : |a (CaOTULAS)160190751

040: : |c MiU |d MiU

050/1:0 : |a QA3 |b .G63

100:1 : |a Gomes Teixeira, Francisco, |d 1851-1933.

245:00: |a Obras sobre mathematica do Dr. F. Gomes Teixeira ... |c Publicadas
por ordem do governo portuguese ... |n v. 1

260: : |a Coimbra, |b Imprensa da Universidade, |c 1904-

300/1: : |a v. |b diagrs. |c 31 cm.

600/1:10: |a Silva, Daniel Augusto da, |d 1814-1878.

650/2: 0: |a Mathematics.

998/1: : |c RS |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

OBRAS
SOBRE
MATHEMATICA

OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

DO

Dr. F. Gomes Teixeira

DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, ETC.

PUBLICADAS

POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS



VOLUME TERCEIRO



COIMBRA
Imprensa da Universidade
1906

CURSO
DE
ANALYSE INFINITESIMAL

CALCULO DIFFERENCIAL

(Premiado pela Academia Real das Sciencias de Lisboa
com o premio instituido por El-Rei D. Luiz I)

4.^a edição

INTRODUÇÃO

CAPITULO I

**Theoria dos numeros irracionais,
dos numeros negativos e dos numeros imaginarios.
Regras para o seu calculo.**

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra ⁽¹⁾

1. Os numeros inteiros e os numeros fraccionarios, cujos numeradores e denominadores são numeros inteiros, constituem a classe dos numeros *rationaes*, que podem ser *positivos* ou *negativos*. O estudo dos numeros racionais positivos é o primeiro objecto da Arithmetica. Ahi são definidos, assim como as operações numericas, e ahi são estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações.

Em seguida, na Algebra, em logar de numeros consideram-se letras que os representam, e definem-se as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas, isto é, da maneira seguinte:

1.º *Addição* dos numeros representados pelas letras a e b é a combinação *univoca* (de resultado unico) d'estes numeros, cujas leis fundamentaes são:

$$1) \quad a + b = b + a, \quad (\text{lei commutativa})$$

$$2) \quad (a + b) + c = (a + c) + b, \quad (\text{lei associativa})$$

$$3) \quad a + 0 = a.$$

⁽¹⁾ A theoria geral das operações, consideradas como combinações de numeros ou objectos, foi estudada por Grassmann nos seus *Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844), por Hankel na sua *Theorie der complexen Zahl-systeme* (Leipzig, 1867), etc.

2.º *Subtração* é a operação inversa da adição.

3.º *Multiplicação* é a combinação unívoca dos números, representados pelas letras a e b , caracterizada pelas leis:

- 1) $ab = ba$, (lei commutativa)
- 2) $(ab)c = (ac)b$, (lei associativa)
- 3) $(a + b)c = ac + bc$, (lei distributiva)
- 4) $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$.

4.º *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.º *Elevação a potencia* é a multiplicação de factores eguaes.

6.º *Extracção de raiz* é a operação inversa da elevação a potencia.

Reflectindo um pouco sobre o que se aprendeu na Arithmetica, é facil de ver que o calculo arithmetico é principalmente fundado nas leis fundamentaes precedentes, na propriedade que têm as operações de darem resultados eguaes quando se substituem a e b por quantidades eguaes e nas leis fundamentaes das egualdades: $a = a$; de $a = b$ resulta $b = a$; de $a = b$ e $b = c$ resulta $a = c$.

Duas das operações precedentes, a subtração e a extracção de raiz, não são sempre possiveis, quando se usa sómente dos números racionaes positivos. Para não ter porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novas especies de números e generalizam-se as definições das operações, tendo sempre em vista que se conservem as propriedades fundamentaes que vimos de indicar, e que as novas definições levem aos mesmos resultados que as antigas, quando se applicam aos números para os quaes estas foram primeiramente estabelecidas. Foi o que se viu na Arithmetica, onde appareceram os números *irracionais*, e na Algebra, onde appareceram os números *negativos* e os números *imaginarios*. Aqui vamos recordar succintamente a theoria d'estas tres especies de números.

II

Theoria dos números irracionais ⁽¹⁾

2. Consideremos um grupo composto de uma infinidade de números racionaes, positivos e crescentes,

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

(1) A theoria dos números irracionais foi tratada primitivamente debaixo de uma fórmula geometrica. Occuparam-se da theoria arithmetica dos mesmos números, á qual se tem dado diversas fórmulas, Weierstrass

e outro grupo composto de uma infinidade de numeros racionais, positivos e decrescentes,

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

e supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo, e que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se existe um numero racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os do segundo grupo, este numero é completamente determinado pelos dois grupos. Com effeito, se existissem dois numeros A e B que satisfizessem a esta condição, estes numeros deveriam estar comprehendidos entre b_n e a_n , e seria, por maior que fosse n ,

$$B - A < b_n - a_n,$$

o que é absurdo, visto que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se porém não existe numero algum racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os do segundo, diz-se, por definição, que os dois grupos estão separados por um numero *irrational*. Como, neste caso, qualquer numero racional differente dos precedentes é menor do que um valor de a_n ou maior do que um valor de b_n , vê-se que cada numero irrational divide a totalidade dos numeros racionais em dois grupos, taes que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os do segundo grupo. Os numeros do primeiro d'estes grupos dizem-se *menores* e os do segundo *maiores* do que o numero irrational considerado.

Dois numeros irracionais A e B dizem-se *eguaes* quando todos os numeros racionais menores do que A são também menores do que B e todos os numeros racionais maiores do que A são também maiores do que B.

Diz-se que A é maior do que B, ou que B é menor do que A, quando existe algum numero racional maior do que B e menor do que A.

3. Definamos agora as operações sobre numeros irracionais.

no seu curso na Universidade de Berlin, Méray em um trabalho publicado na *Revue des sociétés savantes* (Paris, 1869), G. Cantor em artigos publicados nos *Mathematische Annalen* (Leipzig, t. v e t. xxi), Dedekind em um trabalho intitulado *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Brunswick, 1872), Tannery na sua *Introduction à la théorie des fonctions* (Paris, 1886), Capelli em um artigo publicado no *Giornale di Matematiche* (Napoli, 1897) e nas suas *Istituzioni di Analisi algebrica* (Napoli, 1902), etc. A theoria de Weierstrass póde ver-se em um trabalho publicado por Pincherle no t. xviii do *Giornale di Matematiche*.

*

1.º Sejam dados dois numeros racionais ou irracionais A e B, determinados pelos grupos

$$(1) \quad \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots \\ b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots, \end{cases}$$

e formemos o grupo de numeros crescentes

$$a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n, \dots$$

e o grupo de numeros decrescentes

$$b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \dots, b_n + b'_n, \dots$$

Como os numeros do primeiro d'estes grupos são menores do que os do segundo, e como a differença entre $b_n + b'_n$ e $a_n + a'_n$ pôde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande, estes grupos determinam um numero *racional* ou *irrational*, que os separa, o qual se chama *somma* dos numeros dados.

Para justificar esta definição, notemos em primeiro logar que, se os numeros dados A e B forem racionais, os grupos que vimos de formar determinam o numero racional $A + B$, visto que este numero os separa.

Notemos em seguida que a *somma* dos numeros A e B, como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1, como é facil de verificar.

Assim, por ser

$$a_n + a'_n = a'_n + a_n, \quad b_n + b'_n = b'_n + b_n,$$

vê-se que os grupos de numeros que determinam $A + B$ coincidem com os que determinam $B + A$, e que temos portanto $A + B = B + A$.

Do mesmo modo, por ser

$$\begin{aligned} (a_n + a'_n) + a''_n &= (a_n + a''_n) + a'_n, \\ (b_n + b'_n) + b''_n &= (b_n + b''_n) + b'_n, \end{aligned}$$

$(a''_1, a''_2, \dots), (b''_1, b''_2, \dots)$ sendo os grupos que determinam um terceiro numero C, temos

$$(A + B) + C = (A + C) + B.$$

2.º Consideremos ainda os números A e B e seja $A > B$. Demonstra-se, procedendo como no caso anterior, que os grupos

$$\begin{aligned} a_1 - b'_1, a_2 - b'_2, \dots, a_n - b'_n, \dots \\ b_1 - a'_1, b_2 - a'_2, \dots, b_n - a'_n, \dots \end{aligned}$$

determinam um número racional ou irracional. A este número chama-se *diferença* dos números dados, e representa-se por $A - B$. É fácil, com effeito, de ver que da sua somma com o número B resulta um número igual a A. Para isso, basta notar que esta somma é determinada pelos grupos

$$\begin{aligned} a_1 - b'_1 + a'_1, \dots, a_n - b'_n + a'_n, \dots \\ b_1 - a'_1 + b'_1, \dots, b_n - a'_n + b'_n, \dots, \end{aligned}$$

e que, sendo α um número racional qualquer, menor do que esta somma, temos (para um valor de n sufficientemente grande)

$$\alpha < a_n - b'_n + a'_n < A,$$

e que, sendo α maior do que a mesma somma, temos

$$\alpha > b_n - a'_n + b'_n > B;$$

portanto, em virtude da definição de egualdade, é

$$(A - B) + B = A.$$

3.º Chama-se *producto* dos números A e B ao número definido pelos grupos

$$\begin{aligned} a_1 a'_1, a_2 a'_2, \dots, a_n a'_n, \dots, \\ b_1 b'_1, b_2 b'_2, \dots, b_n b'_n, \dots \end{aligned}$$

Para justificar esta definição, é necessario demonstrar que estes dois grupos determinam um número racional ou irracional, e, para isso, basta attender a que $a_n a'_n$ cresce e $b_n b'_n$ decresce, quando n augmenta, a que temos $b_n b'_n > a_m a'_m$, quaesquer que sejam os valores de n e m , e a que da desigualdade

$$b_n b'_n - a_n a'_n = b_n (b'_n - a'_n) + a'_n (b_n - a_n) < b_1 (b'_n - a'_n) + b'_1 (b_n - a_n)$$

resulta que a diferença $b_n b'_n - a_n a'_n$ se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes.

É facil demonstrar que o producto, assim definido, satisfaz ás leis fundamentaes da multiplicação, mencionadas no n.º 1.

4.º Consideremos agora os grupos

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots,$$

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}, \dots,$$

o primeiro composto de numeros que crescem com n , o segundo composto de numeros que decrescem com n e são superiores a todos os do primeiro grupo. Por meio da desigualdade

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n b'_n - a_n a'_n}{a'_n b'_n} < \frac{b_n b'_n - a_n a'_n}{a_1'^2}$$

e da desigualdade anterior, vê-se que a differença $\frac{b_n}{a_n} - \frac{a_n}{b_n}$ se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes. Logo estes grupos definem um numero, racional ou irracional, que se chama *quociente* dos numeros A e B.

Para mostrar que o producto da multiplicação do numero que vem de ser definido pelo numero B, definido pelos grupos (2), é egual ao numero A, definido pelos grupos (1), basta attender a que este producto é determinado pelos grupos

$$\frac{a_1}{b_1} a'_1, \frac{a_2}{b_2} a'_2, \dots, \frac{a_n}{b_n} a'_n, \dots,$$

$$\frac{b_1}{a_1} b'_1, \frac{b_2}{a_2} b'_2, \dots, \frac{b_n}{a_n} b'_n, \dots,$$

e a que, se α representar um numero racional qualquer, temos, para um valor de n sufficientemente grande, quando α é inferior ao referido producto

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n} a'_n < a_n < A,$$

e, quando α é superior ao mesmo producto,

$$\alpha > \frac{b_n}{a_n} b'_n > b_n > A.$$

5.º Chama-se *potencia* do grau m do numero irracional A ao producto de m factores eguaes a A. Os grupos que a determinam são pois

$$a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m, \dots; \quad b_1^m, b_2^m, \dots, b_n^m, \dots$$

6.º Chama-se *raiz* de indice m do numero A ao numero que elevado á potencia m dá A. Adeante veremos que existe sempre um numero positivo que satisfaz a esta condição.

4. Para completar a theoria das operações sobre numeros irracionais, que vem de considerar-se, é ainda necessario mostrar que o valor da somma, producto, etc. dos numeros A e B não varia quando se substituem os grupos de numeros empregados para os determinar por outros que definam numeros eguaes a estes.

Sejam A, B, C e D quatro numeros determinados pelos grupos

$$\left. \begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots \\ b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1, c_2, \dots, c_n, \dots \\ d_1, d_2, \dots, d_n, \dots \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} c'_1, c'_2, \dots, c'_n, \dots \\ d'_1, d'_2, \dots, d'_n, \dots \end{array} \right\},$$

e seja $A = C$, $B = D$. A somma dos numeros A e B é determinada pelos grupos

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n, \dots \\ b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \dots, b_n + b'_n, \dots \end{array} \right\}$$

e a somma dos numeros C e D pelos grupos

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c'_1, c_2 + c'_2, \dots, c_n + c'_n, \dots \\ d_1 + d'_1, d_2 + d'_2, \dots, d_n + d'_n, \dots \end{array} \right\}.$$

Para mostrar que estas sommas são eguaes, notemos que das egualdades $A = C$ e $B = D$ resulta, quaesquer que sejam os valores de m e n ,

$$a_n < d_m, \quad a'_n < d'_m, \quad b_n > c_m, \quad b'_n > c'_m.$$

Sendo pois α um numero racional, menor do que $A + B$, existirá um valor de n tal que será, qualquer que seja m ,

$$\alpha < a_n + a'_n < d_m + d'_m,$$

e portanto $\alpha < C + D$; e, sendo α maior do que $A + B$,

$$\alpha > b_n + b'_n > c_m + c'_m,$$

e portanto $\alpha > C + D$. Logo, em virtude da definição de egualdade, temos a relação

$$A + B = C + D.$$

Do mesmo modo se procede no caso das outras operações.

Como consequencia do que precede póde mostrar-se que, se for $A > B$ e $C \geq D$, temos $A + C > B + D$. Da definição de subtracção resulta, com effeito, que existem dois numeros K e K' taes que $A = B + K$ e $C = D + K'$; portanto temos a egualdade

$$A + C = B + D + K + K',$$

da qual se deduz a desigualdade que se pretende demonstrar.

É facil estender aos numeros irracionais todas as outras propriedades das desigualdades que têm logar no caso dos numeros racionais.

5. A theoria precedente abrange os numeros irracionais a que se foi conduzido em Arithmetica pela extracção das raizes. Assim, por exemplo, \sqrt{A} , quando não é igual a um numero racional, representa um numero irracional que separa o grupo de numeros racionais, que se obtêm extrahindo a raiz quadrada a A pelo processo ensinado na Arithmetica, levando a approximação successivamente até ás decimas, centesimas, etc.,

$$\frac{m_1}{10}, \frac{m_2}{10^2}, \frac{m_3}{10^3}, \dots, \frac{m_n}{10^n}, \dots$$

do grupo de numeros

$$\frac{m_1 + 1}{10}, \frac{m_2 + 1}{10^2}, \frac{m_3 + 1}{10^3}, \dots, \frac{m_n + 1}{10^n}, \dots$$

Os quadrados dos numeros do primeiro grupo e dos numeros racionais inferiores a estes são menores do que A , e os quadrados dos numeros do segundo grupo e dos numeros racionais superiores a estes são maiores do que A ; porisso \sqrt{A} separa os numeros racionais cujos quadrados são menores do que A d'aquelles cujos quadrados são maiores do que A .

É facil de ver que o numero irracional assim definido goza da propriedade fundamental de ser o seu quadrado igual a A . Elevando com effeito ao quadrado o numero determinado pelos grupos anteriores, vem o numero definido pelos grupos (n.º 3-5.º)

$$\frac{m_1^2}{10^2}, \frac{m_2^2}{10^4}, \dots, \frac{m_n^2}{10^{2n}}, \dots$$

$$\frac{(m_1 + 1)^2}{10^2}, \frac{(m_2 + 1)^2}{10^4}, \dots, \frac{(m_n + 1)^2}{10^{2n}}, \dots;$$

mas os numeros do primeiro grupo são todos inferiores a A e os do segundo grupo são superiores a A ; logo estes grupos determinam o numero A .

Do mesmo modo se consideram as raizes de indice superior a 2.

6. Consideremos agora o grupo de numeros crescentes

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

e o grupo de numeros decrescentes, maiores do que os anteriores,

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots,$$

e supponhamos que estes numeros são *irracionais* e que a differença $w_n - v_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande. Vamos mostrar que, para os separar, não é necessario introduzir uma nova especie de numeros, pois que os separa um numero racional ou irracional.

Seja, com effeito,

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

um grupo de numeros racionais crescentes e

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

um grupo de numeros racionais decrescentes, que se formem tomando um numero racional entre cada par de numeros successivos dos grupos anteriores. Como a_n e b_n estão comprehendidos entre v_n e w_n , temos

$$b_n - a_n < w_n - v_n,$$

e porisso os ultimos grupos de numeros determinam um numero racional ou irracional c , que os separa. Este numero não póde ser inferior aos numeros v_1, v_2, \dots , porque se fosse $c < v_n$, teriamos $c < a_n$, o que não póde ter logar, e, por motivo analogo, não póde ser superior aos numeros w_1, w_2, \dots ; logo separa estes dois grupos.

7. Como consequencia da doutrina que precede, podemos agora, completando o que se disse no fim do n.º 3, determinar $\sqrt[m]{A}$, quando A é irracional.

Consideremos, para isso, o grupo de numeros crescentes

$$\sqrt[m]{a_1}, \sqrt[m]{a_2}, \dots, \sqrt[m]{a_n}, \dots$$

e o grupo de numeros decrescentes, superiores aos do primeiro grupo,

$$\sqrt[m]{b_1}, \sqrt[m]{b_2}, \dots, \sqrt[m]{b_n}, \dots$$

B

Elevando á potencia m os dois membros da identidade

$$\sqrt[m]{b_n} = \sqrt[m]{a_n} + (\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}),$$

vem

$$b_n = a_n + m(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n})(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \dots;$$

e portanto, temos

$$b_n - a_n > m(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n})(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} > m(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n})(\sqrt[m]{a_1})^{m-1},$$

o que dá

$$\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n} < \frac{b_n - a_n}{m(\sqrt[m]{a_1})^{m-1}}.$$

Vê-se, por meio d'esta desigualdade, que a differença entre os termos da ordem n dos dois grupos considerados se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes. Logo os dois grupos determinam um numero racional ou irracional.

Para mostrar que o numero que vem de ser obtido, elevado á potencia m , dá A, basta applicar aos grupos que o determinam a regra dada no n.º 3-5.º

8. *Representação geometrica dos numeros irrationaes.* Convem recordar que os numeros irrationaes que, em Geometria elementar, a medição dos segmentos de recta incommensuraveis com a unidade levou a considerar, coincidem com os que vêem de ser definidos. Com effeito, sendo dado o segmento OK, resulta do

$$\overline{O \quad M_1 \quad M_2 \quad M_n \quad K \quad N_n \quad N_2 \quad N_1}$$

postulado de Archimedes ⁽¹⁾ que podemos determinar dois segmentos OM₁ e ON₁, entre os quaes esteja comprehendido OK, que contenham respectivamente m_1 e $m_1 + 1$ vezes a unidade. Do mesmo modo, dividindo a unidade em um numero determinado de partes eguaes, dez por exemplo, e tomando uma d'ellas para nova unidade, podemos determinar dois segmentos OM₂ e ON₂ que contenham respectivamente m_2 e $m_2 + 1$ vezes a nova unidade, e

⁽¹⁾ Dá-se o nome de *postulado de Archimedes* ao principio seguinte:

Se λ e λ_1 representarem dois segmentos de recta e se for $\lambda > \lambda_1$, existe um numero inteiro m tal que é $\lambda_1 \cdot m > \lambda$.

A doutrina d'este numero é fundada nos postulados que caracterizam a linha recta, no postulado de Archimedes e no *postulado de continuidade*, cujo enunciado é dado no texto.

sejam portanto representados pelos números $\frac{m_2}{10}$ e $\frac{m_2+1}{10}$, quando se referem á primitiva unidade. Continuando do mesmo modo formam-se dois grupos de segmentos

$$OM_1, OM_2, OM_3, \dots; \quad ON_1, ON_2, ON_3, \dots,$$

entre os quaes está comprehendido OK, taes que a differença entre ON_n e OM_n se póde tornar menor do que qualquer segmento dado, tomando n sufficientemente grande; e a estes grupos de segmentos correspondem os grupos de números

$$m_1, \frac{m_2}{10}, \frac{m_3}{10^2}, \dots; \quad m_1+1, \frac{m_2+1}{10}, \frac{m_3+1}{10^2}, \dots,$$

que determinam um numero racional ou irracional A, que os separa. Ao segmento OK corresponde pois um numero irracional A, tal que os numeros racionais menores do que A são representados por segmentos menores do que OK e os numeros maiores do que A são representados por segmentos maiores do que OK. Podemos acrescentar que não existe outro numero B, que satisfaça a estas condições, porque, se um tal numero existisse e fosse $B > A$, entre B e A estaria comprehendido um numero racional a , que, por ser menor do que B, seria representado por um segmento menor do que OK, e, por ser maior do que A, seria representado por um segmento maior do que OK, o que é absurdo. O numero que vimos de determinar é o que, em Geometria elementar, se tomou para medida do segmento considerado.

Reciprocamente, a todo o numero irracional A, definido pelos grupos de numeros racionais (a_1, a_2, \dots) e (b_1, b_2, \dots) , corresponde um segmento OK, tal que os numeros racionais menores do que A são representados por segmentos menores do que OK e os numeros racionais maiores do que A são representados por segmentos maiores do que OK. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto O, todos os numeros racionais menores do que o numero irracional considerado, que entram na sua definição, obtem-se uma serie de pontos, que representaremos por $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. Do mesmo modo os numeros maiores do que A, que entram na sua definição, dão outra serie de pontos, que representaremos por $N_1, N_2, \dots, N_n, \dots$, os quaes, por ser $ON_n > OM_m$, quaesquer que sejam os valores de m e n , estão separados dos anteriores. Esta separação não póde ser feita por um segmento de recta, porque se o fosse, o numero que representa o segmento $M_n N_n$, isto é $b_n - a_n$, não poderia ser inferior ao que representa aquelle segmento. Admittindo porém como postulado (*postulado da continuidade*) ⁽¹⁾ que os separe um ponto K, o segmento OK satisfaz ás condições indicadas.

⁽¹⁾ Foi G. Cantor quem primeiro notou a necessidade de fazer intervir este postulado na presente questão.

Definiram-se na Geometria elementar as operações sobre segmentos de recta e viu-se que, se L e L_1 são dois segmentos representados pelos números A e B , os números $A+B$ e $A.B$ representam a somma e o producto dos segmentos considerados. Não é necessario recordar aqui como se estabelece este principio no caso de A e B serem racionais. No caso de serem números irracionais, definidos pelos grupos (1) e (2), os segmentos L e L_1 estão respectivamente comprehendidos entre os segmentos correspondentes a a_n e b_n e entre os que correspondem a a'_n e b'_n ; e portanto o segmento $L+L_1$ está comprehendido entre os segmentos correspondentes a $a_n+a'_n$ e $b_n+b'_n$, qualquer que seja n . O número $A+B$, que separe estes ultimos números, corresponde pois ao segmento $L+L_1$. Do mesmo modo se procede no caso da multiplicação dos segmentos L e L_1 .

A correspondencia entre os segmentos de recta e os números, que vem de ser considerada, é a base primordial da Geometria analytica. Em virtude d'ella, a toda a relação entre segmentos corresponde uma relação entre números e reciprocamente.

III

Números negativos e números imaginarios

9. Números negativos. Consideremos a diferença $a-b$ entre os dois números a e b . Se fôr $b > a$, a subtracção precedente é impossivel, empregando os números até aqui estudados. Considera-se porisso $a-b$ como definindo uma nova especie de números, a que se chama *números negativos*.

No caso de ser $a > b$ e $c > d$, os números $a-b$ e $c-d$ são eguaes quando

$$a+d=b+c;$$

no caso de ser $a < b$ e $c \leq d$ dizem-se, por definição, eguaes quando esta condição tem logar.

Diz-se que $a-b$ é maior do que $c-d$, ou que $c-d$ é menor do que $a-b$, quando

$$a+d > b+c.$$

D'aqui resulta, pondo $a=0$ e $c=0$, que $-b > -d$, quando $d > b$, isto é, que um número negativo menor do que outro tem maior valor absoluto.

Introduzida assim esta especie de números, resta definir as operações a que se sujeitam, de modo que as leis indicadas no n.º 1 tenham logar.

1.º Chama-se *addição* de dois números $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)+(c-d)=a+c-(b+d).$$

2.º Chama-se *multiplicação* de dois números $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela igualdade

$$(a-b)(c-d) = ac + bd - (bc + ad).$$

3.º Chamam-se *subtração* e *divisão* as operações inversas da adição e da multiplicação.

4.º Chama-se *elevação a potencia* a multiplicação de factores eguaes.

É facil de ver que as operações assim definidas gozam das propriedades fundamentaes enunciadas no n.º 1, que coincidem com as operações arithmeticas no caso de ser $a > b$ e $c > d$, e que dão origem ás regras bem conhecidas da Algebra.

10. Números imaginarios. A extracção da raiz de grau par das quantidades negativas é uma operação impossivel, quando se usa dos numeros precedentemente considerados. D'ahi vem a necessidade de introduzir uma nova especie de numeros, da fórma $a + b\sqrt{-1}$, a que se chama *numeros imaginarios* ou *numeros complexos*, e que comprehendem todos os precedentes como caso particular.

Para introduzir estes numeros no calculo, é necessario definir as operações a que se sujeitam, de modo que lhes sejam applicaveis as leis fundamentaes expostas no n.º 1.

1.º Dois numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ dizem-se *eguaes* quando é $a = c$, $b = d$.

2.º Chama-se *adição* dos dois numeros imaginarios $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = a + c + (b + d)\sqrt{-1}.$$

3.º Chama-se *subtração* a operação inversa da adição.

4.º Chama-se *multiplicação* dos numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

5.º Chama-se *divisão* do numero $a + b\sqrt{-1}$ pelo numero $c + d\sqrt{-1}$ a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim achar um numero $x + y\sqrt{-1}$ que multiplicado por $c + d\sqrt{-1}$ dê $a + b\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$a + b\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = cx - dy + (dx + cy)\sqrt{-1},$$

d'onde se tira

$$a = cx - dy, \quad b = dx + cy.$$

Estas equações dão os valores de x e y que entram no quociente pedido, e vem

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \sqrt{-1}.$$

É facil de ver que as operações, que vimos de definir, gozam das propriedades fundamentais expostas no n.º 1, e que coincidem, no caso de ser $b=0$ e $d=0$, com as operações relativas aos numeros reaes.

11. Todo o imaginario $a + b\sqrt{-1}$ póde ser reduzido á fórma trigonometrica

$$\rho (\cos \theta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \theta),$$

pondo

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

o que dá

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\rho}.$$

A primeira d'estas formulas determina ρ . As duas outras, consideradas simultaneamente, determinam θ . As quantidades ρ e θ chamam se respectivamente *modulo* e *argumento* do imaginario. É facil de ver, pondo $b=0$, que os modulos das quantidades reaes coincidem com os seus valores absolutos.

Para commodidade representa-se ordinariamente o imaginario $\sqrt{-1}$ pela letra i , e representa-se muitas vezes o modulo do numero z , quando é imaginario, ou o seu valor absoluto, quando é real, pelo signal $|z|$. Estas notações serão adoptadas n'esta obra.

As regras para o calculo dos imaginarios, quando se lhes dá a fórma trigonometrica, conduzem aos resultados seguintes:

I. A somma e a differença dos imaginarios

$$z = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad z' = \rho' (\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')$$

são dadas pela egualdade

$$z \pm z' = \rho \cos \theta \pm \rho' \cos \theta' + i(\rho \operatorname{sen} \theta \pm \rho' \operatorname{sen} \theta')$$

ou

$$z \pm z' = R (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega),$$

pondo

$$\rho \cos \theta \pm \rho' \cos \theta' = R \cos \omega, \quad \rho \operatorname{sen} \theta \pm \rho' \operatorname{sen} \theta' = R \operatorname{sen} \omega,$$

o que dá

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \pm 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}.$$

Esta expressão de R mostra que é $R^2 \leq (\rho + \rho')^2$; e portanto temos o theorema seguinte:

O modulo de uma somma algebrica de imaginarios não póde ser maior do que a somma dos modulos das parcellas.

II. O producto dos mesmos imaginarios é dado pela egualdade

$$zz' = \rho\rho' [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] = \rho\rho' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')].$$

Multiplicando este resultado por

$$z'' = \rho'' (\cos \theta'' + i \sin \theta''),$$

vem

$$zz'z'' = \rho\rho'\rho'' [\cos(\theta + \theta' + \theta'') + i \sin(\theta + \theta' + \theta'')].$$

Em geral temos

$$zz' \dots z^{(n-1)} = \rho\rho' \dots \rho^{(n-1)} [\cos(\theta + \theta' + \dots + \theta^{(n-1)}) + i \sin(\theta + \theta' + \dots + \theta^{(n-1)})];$$

e portanto o modulo do producto de imaginarios é igual ao producto dos modulos dos factores, e o seu argumento é igual á somma dos argumentos dos factores.

Se fôr $z = z' = \dots = z^{(n-1)}$, vem o resultado importante

$$z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \sin n\theta],$$

conhecido pelo nome de *formula de Moivre*, por ter sido dada por este geometra na sua *Miscellanea analytica*, publicada em 1730.

III. Dividindo por z o imaginario

$$u = r(\cos \omega + i \sin \omega)$$

vem

$$\frac{u}{z} = \frac{r}{\rho} \frac{(\cos \omega + i \sin \omega)(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{r}{\rho} [\cos(\omega - \theta) + i \sin(\omega - \theta)];$$

e portanto o modulo do quociente de dois imaginarios é igual ao quociente da divisão do modulo do dividendo pelo modulo do divisor, e o seu argumento é igual á differença entre o argumento do dividendo e o argumento do divisor.

Dividindo este resultado por z' , vem

$$\frac{u}{zz'} = \frac{r}{\rho\rho'} [\cos(\omega - \theta - \theta') + i \sin(\omega - \theta - \theta')].$$

Em geral, temos

$$\frac{u}{zz' \dots z^{(n-1)}} = \frac{r}{\rho\rho' \dots \rho^{(n-1)}} [\cos(\omega - \theta - \theta' - \dots - \theta^{(n-1)}) + i \sin(\omega - \theta - \dots - \theta^{(n-1)})].$$

Fazendo $r = 1$, $\omega = 0$, $z = z' = \dots = z^{(n-1)}$, resulta

$$z^{-n} = \rho^{-n} [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)],$$

convencionando representar $\frac{1}{z^n}$ por z^{-n} , como no caso das quantidades reaes.

Vê-se pois que a *formula de Moivre* ainda tem logar quando o expoente é um numero inteiro negativo.

IV. Passemos á extracção das raizes.

Vejamos se póde ser

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)} = r(\cos \omega + i \sin \omega).$$

Para ter logar esta egualdade deve ser

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = r^n(\cos n\omega + i \sin n\omega),$$

ou

$$\rho \cos \theta = r^n \cos n\omega, \quad \rho \sin \theta = r^n \sin n\omega,$$

d'onde se deduz

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\omega = \theta + 2k\pi,$$

representando por k um inteiro, que póde ter todos os valores positivos e negativos desde $-\infty$ até ∞ .

Vem pois (!)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right].$$

(!) Este theorema é a generalização, dada por Moivre, de um theorema devido a Côtes (*Harmonia mensurarum*, 1722).

O binomio

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

só tem n valores diferentes, correspondentes a $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, pois é fácil de ver que, quando a k se dão valores maiores ou menores do que estes, o seno e o coseno, que entram no binomio, retomam os valores correspondentes aos valores precedentes de k .

Logo a raiz de indice n de qualquer numero tem n valores diferentes, que a formula que vimos de achar, determina.

Das consequencias d'este theorema importante faremos notar as seguintes:

1.º As regras para o calculo dos radicaes foram demonstradas na Arithmetica para o valor unico de cada radical, que lá se considerou. O theorema precedente permite verificar se estas regras se estendem ou não a todos os n valores do radical.

Assim, para verificar que é

$$\sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{zz'},$$

basta attender á egualdade

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] &\times \sqrt[n]{\rho'} \left[\cos \left(\frac{\theta'}{n} + \frac{2k'\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta'}{n} + \frac{2k'\pi}{n} \right) \right] \\ &= \sqrt[n]{\rho\rho'} \left[\cos \left(\frac{\theta + \theta'}{n} + \frac{2(k+k')\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + \theta'}{n} + \frac{2(k+k')\pi}{n} \right) \right], \end{aligned}$$

cujo primeiro membro representa $\sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{z'}$ e cujo segundo membro representa $\sqrt[n]{zz'}$.

Do mesmo modo se verificam as relações

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[mn]{z}, \quad \sqrt[n]{\frac{z}{z'}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{z'}}.$$

2.º Elevando ambos os membros da formula considerada á potencia m , e convencionando representar $(\sqrt[n]{z})^m$ por $z^{\frac{m}{n}}$, como no caso das quantidades reaes, vem a formula

$$(\sqrt[n]{z})^m = z^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left[\cos \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) + i \sin \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right].$$

Esta formula mostra que $(\sqrt[n]{z})^m$ tem n valores distinctos, quando n e m são primos entre si, os quaes correspondem aos valores $0, 1, 2, \dots, n-1$ de k . Com effeito, se fossem eguaes

os valores da expressão considerada correspondente aos valores k' e k'' , dados a k , teríamos

$$\frac{m}{n}(\theta + 2k'\pi) = \frac{m}{n}(\theta + 2k''\pi) + 2M\pi,$$

ou

$$\frac{m(k' - k'')}{n} = M;$$

portanto n , que é primo com m , deveria dividir $k' - k''$, o que não pôde ter lugar, por serem k' e k'' menores do que n . Se porém é $n = \alpha p$ e $m = \beta p$, p representando o maior divisor commum de m e n , a mesma formula mostra que $(\sqrt[n]{z})^m$ tem sómente α valores distinctos, que coincidem com os de $(\sqrt[\alpha]{z})^\beta$.

3.º Escrevendo o segundo membro da ultima egualdade do modo seguinte:

$$\rho^{\frac{m}{n}} \left[\cos \frac{m\theta + 2k'\pi}{n} + i \sin \frac{m\theta + 2k'\pi}{n} \right],$$

onde $k' = mk$, vê-se que todos os seus valores coincidem com valores de $\sqrt[n]{z^m}$; logo a egualdade

$$(A) \quad (\sqrt[n]{z})^m = \sqrt[n]{z^m},$$

tem lugar para todos os n valores dos seus dois membros, quando n e m são primos entre si. Quando porém $n = \alpha p$ e $m = \beta p$, temos

$$(\sqrt[n]{z})^m = (\sqrt[\alpha]{z})^\beta = \sqrt[\alpha]{z^\beta},$$

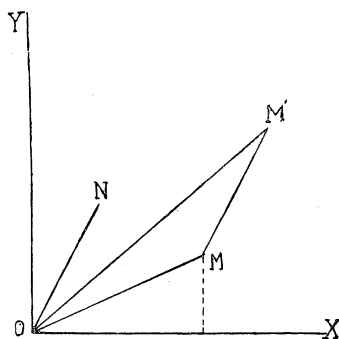
e a egualdade (A) tem pois lugar para os α valores que tem o primeiro membro e para os valores do segundo que coincidem com $\sqrt[\alpha]{z^\beta}$.

12. Representação geometrica dos imaginarios. O imaginario $a + bi$ pôde ser representado geometricamente pelo ponto M cuja abscissa é a e cuja ordenada é b , e reciprocamente; visto que a cada valor do imaginario corresponde uma posição determinada do ponto M, e a cada posição do ponto corresponde um valor determinado do imaginario.

Representando por ρ o segmento OM e por θ o angulo MOP, temos

$$a + ib = OP + i MP = \rho (\cos + i \sin \theta).$$

Logo o segmento OM representa o *modulo* e o angulo MOP representa o *argumento* do imaginario considerado.



As operações sobre imaginarios correspondem operações geometricas determinadas.

Assim a somma dos imaginarios $a + ib$ e $a' + ib'$, cujos modulos são ρ e ρ' e cujos argumentos são θ e θ' , é representada pelo ponto M' , que se obtém tirando primeiramente pela origem das coordenadas um segmento OM, cujo comprimento seja igual a ρ , e que faça com Ox um angulo igual a θ , e em seguida tirando pela extremidade M d'este segmento outro, MM' , cujo comprimento seja igual a ρ' , e que faça com Ox um angulo igual a θ' . Com effeito, as coordenadas do ponto M' são

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta', \quad \rho \sin \theta + \rho' \sin \theta',$$

e portanto M' representa o imaginario

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta' + i(\rho \sin \theta + \rho' \sin \theta'),$$

que coincide com a somma dos imaginarios considerados.

O producto dos mesmos imaginarios é representado por um ponto, cujas coordenadas polares são $\rho\rho'$ e $\theta + \theta'$.

I. Os resultados que precedem podem ainda ser interpretados de outro modo, que convem conhecer.

Para isso, notemos primeiramente que se dá o nome de *vector* a todo o segmento de recta de grandeza e direcção determinadas; que todo o vector se suppõe descripto por um ponto, movendo-se em sentido determinado, partindo de uma extremidade, que se diz *inicial*, até á outra, que se diz *final*; e que dois vectores se dizem *eguaes* quando têm a mesma grandeza e direcção, e são descriptos no mesmo sentido. Notemos, em segundo logar, que o vector OM' , que se determina tirando por M um vector MM' , igual a ON , se diz *somma* dos vectores OM e ON , e que o vector cuja grandeza é igual a $OM \times ON$, e que forma com Ox um angulo igual a $MOx + NOx$, se diz *producto* dos dois vectores.

*

Posto isto, como a cada ponto do plano corresponde um vector, que tem para extremidade final este ponto e para extremidade inicial o ponto O, vê-se que a todo o imaginario corresponde um vector, que tem o ponto O para extremidade inicial, e reciprocamente. Assim aos imaginarios $a + ib$ e $a' + ib'$ correspondem os vectores OM e ON; á *somma* d'estes imaginarios corresponde o vector OM', igual á *somma* dos vectores correspondentes ás parcellas $a + ib$ e $a' + ib'$; e ao *producto* dos mesmos imaginarios corresponde um vector, igual ao *producto* dos vectores correspondentes aos factores $a + ib$ e $a' + ib'$.

As operações sobre vectores, que vêm de ser consideradas, são uma generalização das operações sobre segmentos consideradas na Geometria elementar; e da correspondencia, que vem de ser indicada, entre aquellas operações e as operações sobre imaginarios resulta que as operações sobre vectores se sujeitam ás leis fundamentaes consideradas no n.º 1.

A representação geometrica dos imaginarios e das suas operações foi dada pela primeira vez por Wessel em uma memoria apresentada em 1797 á Academia das Sciencias de Copenhague, a qual ficou por muito tempo desconhecida, e depois por Gauss, Argand, etc. O methodo de investigação geometrica que d'ella resulta foi applicado principalmente por Bellavitis á resolução de muitas questões de Geometria, e abriu o caminho a varios methodos analytico-geometricos com que Grassmann, Hamilton, etc. enriqueceram a sciencia, nos quaes se consideram operações sobre segmentos de recta que se sujeitam a algumas das leis fundamentaes indicadas no n.º 1.

IV

Noção de limite

13. A noção de *limite* appareceu já na Arithmetica e nos Elementos de Geometria, onde se disse que uma quantidade constante A é o *limite* para que tende uma quantidade variavel u , se os valores successivos da variavel se approximam indefinidamente da constante, de tal modo que o valor absoluto da differença $A - u$ possa tomar e conservar um valor menor do que qualquer grandeza dada, por mais pequena que seja.

Em termos mais precisos póde dizer-se que *uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u , que passa por uma infinidade de valores successivos u_1, u_2, u_3, \dots , quando a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um numero n_1 tal que a desigualdade*

$$(1) \quad |A - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1 .

Assim, por exemplo, se os valores successivos da variavel u forem eguaes a $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$, x representando uma quantidade inferior á unidade, em valor absoluto, temos,

pondo $|x| = \frac{1}{1+h}$, onde $h > 0$,

$$|x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1+nh + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2 + \dots} < \frac{1}{1+nh}.$$

Dando pois a n valores que satisfaçam á condição

$$\frac{1}{1+nh} < \delta,$$

isto é valores superiores a $\frac{1-\delta}{h\delta}$, vem $|x|^n < \delta$. Logo u tende para zero ⁽¹⁾.

Da definição precedentemente dada deduzem-se immediatamente as consequencias seguintes:

1.º *A variavel u não póde tender ao mesmo tempo para dois limites differentes.* Com effeito, se u tendesse tambem para uma quantidade B , differente de A , existiria um numero n_2 tal que seria

$$|B - u_n| < \delta,$$

quando $n > n_2$. Logo a desigualdade (n.º 11-I)

$$|A - B| = |A - u_n + u_n - B| \leq |A - u_n| + |B - u_n| < 2\delta$$

seria satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 e n_2 ; o que é absurdo, visto que δ é tão pequeno quanto se queira e $A - B$ é constante.

2.º *Se os valores successivos de uma variavel u estão constantemente comprehendidos entre os valores correspondentes de duas quantidades variaveis v e w , que tendem para o mesmo limite A , u tende tambem para A .* Com effeito, como as desigualdades

$$|A - v_n| < \delta, \quad |A - w_n| < \delta$$

são satisfeitas, por hypothese, a primeira pelos valores de n superiores a um numero n_1 e a segunda pelos valores de n superiores a n_2 , as duas desigualdades são satisfeitas, ao mesmo tempo, pelos valores de n superiores ao maior dos numeros n_1 e n_2 . Porisso e porque, $A - u_n$ estando comprehendida entre $A - v_n$ e $A - w_n$, $|A - u_n|$ é inferior a um dos numeros $|A - v_n|$

⁽¹⁾ No *Corso di Analisi algebrica* de Cesàro (Torino, 1894) são dados muitos exemplos interessantes de determinações de limites.

ou $|A - w_n|$, a desigualdade

$$|A - u_n| < \delta$$

é satisfeita por estes mesmos valores de n , e portanto u tende para A .

3.º *Se os valores successivos da variavel u são todos inferiores a um numero L , u não pôde tender para um numero superior a L .* Com effeito, temos por hypothese

$$A - u_n > A - L.$$

Logo, se fosse $A > L$, não podia ter logar a desigualdade (1) quando a δ se dessem valores inferiores a $A - L$.

4.º *Se os valores successivos da variavel u são todos superiores a um numero L , u não pôde tender para um numero inferior a L .* Com effeito, temos

$$u_n - A > L - A.$$

Logo, se fosse $A < L$, a desigualdade (1) não poderia ter logar quando fosse $\delta < L - A$.

14. O problema que consiste em procurar se uma quantidade variavel tende ou não para um limite, pôde ser substituido por outro, em que se procura se uma certa quantidade tende ou não para zero, em virtude do seguinte theorema importante ⁽¹⁾:

Sejam $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ os valores successivos que toma a variavel u . É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para um limite, que a cada valor dado á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 , tal que a desigualdade

$$(2) \quad |u_{n+p} - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n , superiores a n_1 , combinados com todos os valores de p .

Com effeito, se u tende para um limite A , a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um valor n_1 , tal que as desigualdades

$$|u_{n+p} - A| < \frac{1}{2} \delta, \quad |u_n - A| < \frac{1}{2} \delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1 . Logo tambem é satisfeita pelos mesmos

(1) Este principio foi enunciado pela primeira vez por Bolzano, em 1817, no *Bulletim da Sociedade Real das Sciencias de Praga*, e depois, em 1821, por Cauchy no seu *Cours d'Analyse*.

valores de n a desigualdade (2), visto que é

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - A| + |A - u_n| < \delta.$$

Demonstremos agora que, reciprocamente, quando a desigualdade (2) tem lugar, u tende para um limite.

Dê-se a δ um valor particular δ_1 e represente-se por α o valor correspondente de n_1 . Por ser, por hypothese,

$$|u_{n+p} - u_{\alpha+1}| < \delta_1,$$

quando $n > \alpha$, os valores correspondentes de u_{n+p} estão compreendidos entre as quantidades $u_{\alpha+1} - \delta_1$ e $u_{\alpha+1} + \delta_1$, que representaremos por v_1 e w_1 .

Dê-se em seguida a δ o valor δ_2 , menor do que δ_1 , e seja β o valor correspondente de n_1 . Vê-se do mesmo modo que os valores que toma u_{n+p} , quando $n > \beta$, estão compreendidos entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$. Logo os valores que toma u_{n+p} , quando a n se dão valores que satisfazem ao mesmo tempo ás duas condições $n > \alpha$ e $n > \beta$, estão compreendidos entre v_1 e w_1 e entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$, e portanto entre a maior das quantidades v_1 e $u_{\beta+1} - \delta_2$, que representaremos por v_2 , e a menor das quantidades w_1 e $u_{\beta+1} + \delta_2$, que representaremos por w_2 ; e vê-se que é

$$v_2 > v_1, w_2 < w_1, w_2 - v_2 = u_{\beta+1} + \delta_2 - (u_{\beta+1} - \delta_2) = 2\delta_2,$$

quando $u_{\beta+1} + \delta_2 < w_1$ e $u_{\beta+1} - \delta_2 > v_1$, e

$$v_2 \geq v_1, w_2 \leq w_1, w_2 - v_2 < u_{\beta+1} + \delta_2 - (u_{\beta+1} - \delta_2) = 2\delta_2,$$

nos outros casos.

Continuando do mesmo modo, forma-se um grupo de numeros crescentes

$$v_1, v_2, \dots, v_m, \dots$$

e um grupo de numeros decrescentes

$$w_1, w_2, \dots, w_m, \dots,$$

que satisfazem á condição

$$w_m - v_m \leq 2\delta_m$$

e definem portanto (n.º 6) um numero racional ou irracional c , compreendido entre w_m e v_m ;

e vê-se que u_{n+p} está também compreendido entre v_m e w_m , quando n é maior do que as m quantidades α , β , etc. Temos pois a desigualdade

$$|c - u_{n+p}| \leq 2\delta_m,$$

que é satisfeita pelos valores de $n+p$ superiores a α , β , etc., da qual se conclue que u tende para c .

COROLLARIOS. 1.º *Se a quantidade variavel u cresce constantemente, sem todavia poder exceder um valor determinado L , u tende para um limite.*

Com effeito, se u não tendesse para um limite determinado, existiria, em virtude do theorema precedente, um valor de δ tal que, por maior que fosse o inteiro n_1 , a desigualdade

$$u_{n+p} - u_n \geq \delta$$

seria satisfeita por um valor α , superior a n_1 , dado a n , e por um valor a , dado a p . Teriamos pois

$$u_{\alpha+a} \geq u_{\alpha} + \delta.$$

Pela mesma razão deveria existir um numero β , superior a $\alpha+a$, e um inteiro b , tal que

$$u_{\beta+b} \geq u_{\beta} + \delta,$$

ou, por ser $u_{\beta} > u_{\alpha+a}$,

$$u_{\beta+b} > u_{\alpha+a} + \delta > u_{\alpha} + 2\delta.$$

Continuando do mesmo modo, obteriamos a desigualdade

$$u_{\omega+i} > u_{\alpha} + k\delta,$$

cujos segundo membro poderia tornar-se superior a L , dando a k um valor sufficientemente grande, e da qual resultaria o poder u tornar-se maior que L , o que é contra a hypothese.

2.º *Se a quantidade variavel u decresce constantemente, sem todavia poder ser inferior a um numero l determinado, u tende para um limite.*

Demonstra-se este corollario de um modo semelhante ao que foi empregado para demonstrar o anterior.

15. Seja agora u uma quantidade variavel, cujos valores dependem dos valores de outra quantidade variavel x , que póde ter todos os valores visinhos de um numero a , ou sómente os valores que satisfazem a certas condições, como por exemplo, á de serem maiores do que a ,

ou á de serem menores do que a , etc. A definição de limite e os principios anteriores levam ás consequencias seguintes:

1.º *É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A , quando x tende para a , e para que este limite seja unico, qualquer que seja a serie de valores pelos quaes passe x , que a cada valor que se dê á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero ε tal que a desigualdade*

$$(3) \quad |A - u| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de x que satisfazem á condição

$$(4) \quad |x - a| < \varepsilon.$$

Com effeito, sendo x_1, x_2, x_3, \dots uma serie qualquer de valores de x , que tendam para a , e u_1, u_2, u_3, \dots os valores correspondentes de u , se a desigualdade (3) é satisfeita por todos os valores de u que correspondem aos valores que tem x entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, é satisfeita pelos numeros $u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots$, que correspondem aos numeros $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots$, comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. Logo (n.º 13) os numeros u_1, u_2, u_3, \dots tendem para A .

Reciprocamente, se a todo o grupo (x_1, x_2, x_3, \dots) de valores de x , que tendam para a , corresponder um grupo (u_1, u_2, u_3, \dots) de valores de u , que tendam para A , a cada valor de δ corresponde um numero positivo ε tal que a desigualdade (3) tem logar quando $|x - a| < \varepsilon$. Com effeito, se aquella desigualdade não tivesse logar, existiria um valor de δ tal que, por menor que fosse o valor ε_i que se desse a ε , seria

$$(a) \quad |A - u| \geq \delta$$

para algum valor x_i de x tal que $|x_i - a| < \varepsilon_i$. Dando depois a ε um valor ε_j , tal que $\varepsilon_j < |x_i - a|$, existiria um valor x_j de x , satisfazendo á condição $|x_j - a| < \varepsilon_j$, pelo qual a mesma desigualdade (a) seria satisfeita. Continuando do mesmo modo e escolhendo os numeros $\varepsilon_i, \varepsilon_j, \dots$ de modo que tendam para zero, obter-se-ia uma serie de numeros x_i, x_j, x_l, \dots , tendendo para a , taes que, quando se fizesse passar x por elles, a quantidade u não tenderia para A , o que é contrario á hypothese.

2.º *Se a cada serie de valores de x , que tendem para a , corresponde uma serie de valores de u , que tendem para um limite, este limite é o mesmo para todas as series.*

Sejam x_1, x_2, x_3, \dots e x'_1, x'_2, x'_3, \dots duas series de valores pelos quaes passa x quando tende para a , e sejam A e A' os limites correspondentes para que tende u . Para ver que é $A = A'$, basta notar que, se A fosse differente de A' , fazendo passar x por uma terceira serie

de valores, composta dos numeros das duas series anteriores, dispostos alternadamente, os valores de u tenderiam para A e A' , o que é contrario á hypothese.

3.º É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para um limite, quando x tende para a , e para que este limite seja unico, qualquer que seja a serie de valores pelos quaes passe x , que a cada valor dado á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero positivo ε tal que a desigualdade

$$(5) \quad |u'' - u'| < \delta$$

seja satisfeita por todos os pares de valores, u' e u'' , de u , correspondentes aos valores x' e x'' de x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon$.

Com effeito, se u tende para A , quando x tende para a , a cada valor dado á quantidade positiva δ corresponde um numero ε tal que as desigualdades

$$|u' - A| < \frac{1}{2} \delta, \quad |u'' - A| < \frac{1}{2} \delta$$

são satisfeitas por todos os pares de valores, u' e u'' , de u que correspondem a valores de x que satisfaçam á condição $|x - a| < \varepsilon$; e portanto a desigualdade

$$|u'' - u'| < |u'' - A| + |u' - A| < \delta$$

é satisfeita pelos mesmos valores de u' e u'' .

Para demonstrar que, reciprocamente, se a cada valor de δ corresponde um numero ε tal que a desigualdade (5) é satisfeita por todos os pares de valores, u' e u'' , de u que correspondem aos valores de x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon$, u tende para A , basta notar que, sendo, como anteriormente, x_1, x_2, x_3, \dots uma serie qualquer de valores que tendam para a , e u_1, u_2, u_3, \dots os valores correspondentes de u , a desigualdade (5) é satisfeita, por hypothese, quando u' e u'' representam dois quaesquer dos numeros u_m, u_{m+1}, \dots , correspondentes aos numeros $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots$, comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. Portanto, quando x passa pela serie de valores considerados, u tende para um limite (n.º 14) e este limite é unico (n.º 15-2.º).

4.º Se u cresce constantemente, quando x se aproxima constantemente de a , sem poder exceder um numero L , u tende para um limite, quando x tende de qualquer modo para a , e este limite é unico.

Com effeito, seja x_1, x_2, x_3, \dots uma serie de valores de x que se approximem constantemente de a e que tendam para a . Os valores correspondentes de u tendem para um limite A , em virtude do primeiro corollário do n.º 14; e porisso existe um numero m tal que a desigualdade $|u - A| < \delta$ é satisfeita pelos valores de u que correspondem aos valores x_m, x_{m+1}, \dots de x .

Considerando outra serie qualquer $(x'_1, x'_2, x'_3, \dots)$ de valores de x que tendam para a , sem ser necessario que se approximem constantemente de a , a mesma desigualdade é satisfeita, por hypothese, pelos valores x'_n, x'_{n+1}, \dots , comprehendidos entre x_m e a ; logo, quando x passa por esta serie de valores u , tende ainda para o limite A .

Um theorema analogo tem logar quando u decresce constantemente, sem se tornar inferior a um numero l .

16. Para designar que u tende para A , quando x tende para a , escreve se ⁽¹⁾:

$$\lim_{x=a} u = A.$$

Muitas questões importantes de Analyse levam a procurar o limite para que tendem quantidades dadas. Os principios seguintes facilitam esta indagação.

1.º *O limite para que tende a somma de duas quantidades variaveis, dependentes de x , que tendem para limites determinados, quando x tende para a , existe e é igual á somma dos limites para que tendem as parcelas.*

Sejam u e v duas quantidades variaveis, dependentes de x , que tendam para os limites A e B , quando x tende para a .

A cada valor dado a δ corresponde, por hypothese, uma quantidade positiva ϵ' tal que a desigualdade

$$|A - u| < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \epsilon'$.

Do mesmo modo, existe uma quantidade positiva ϵ'' tal que a desigualdade

$$|B - v| < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \epsilon''$.

Logo, representando por ϵ a menor das quantidades ϵ' e ϵ'' , a desigualdade (n.º 11-I)

$$|A - u + B - v| < \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \epsilon$; e portanto a quantidade $u + v$ tende para o limite $A + B$.

⁽¹⁾ Em toda esta obra, quando dissermos que uma variavel u tende para um limite, quando outra variavel, da qual a primeira depende, tende tambem para um limite, sem especificar a serie de valores pelos quaes passa esta ultima, supponos que isto tem logar qualquer que seja esta serie de valores.

2.º O limite para que tende o producto uv existe e é igual ao producto dos limites para que tendem os factores.

Deduz-se este principio da identidade

$$AB - uv = A(B - v) + v(A - u).$$

Com effeito, a cada valor dado a δ' corresponde um numero ε' tal que a desigualdade

$$|A - u| < \delta'$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon'$. Chamando porém M um numero maior do que os valores que toma $|v|$ quando a x se dão todos os valores que satisfazem á condição precedente, vem

$$M|A - u| < M\delta'$$

e portanto, pondo $M\delta' = \frac{1}{2}\delta$,

$$|v||A - u| < \frac{1}{2}\delta.$$

Esta desigualdade é pois satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon'$

Do mesmo modo se vê que ha sempre um valor ε'' tal que a desigualdade

$$|A||B - v| < \frac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon''$.

Logo a desigualdade

$$|AB - uv| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon$; e portanto uv tende para o limite AB .

3.º O limite para que tende o quociente $\frac{u}{v}$ existe e é igual ao quociente dos limites para que tendem u e v , quando v não tende para zero.

Com effeito, pondo

$$\frac{u}{v} = w, \quad \frac{A}{B} = C,$$

temos a identidade

$$w - C = \frac{u - A}{v} + \frac{A(B - v)}{Bv}.$$

Mas mostra-se, como no caso anterior, que, dado δ , existe sempre um valor ε tal que as desigualdades

$$\left| \frac{u-A}{v} \right| < \frac{1}{2} \delta, \quad \left| \frac{A(B-v)}{Bv} \right| < \frac{1}{2} \delta$$

são satisfeitas pelos valores de x que verificam a condição $|x-a| < \varepsilon$.

Logo a desigualdade

$$|w-C| < \delta$$

é satisfeita pelos mesmos valores de x ; e portanto $\frac{u}{v}$ tende para $\frac{A}{B}$.

4.º *O limite para que tende $\sqrt[n]{u}$, quando u é positivo e tende para A , existe e é igual a $\sqrt[n]{A}$.*

Pondo com effeito na identidade conhecida

$$k^n - l^n = (k-l)(k^{n-1} + lk^{n-2} + \dots + l^{n-1})$$

$k = \sqrt[n]{u}$, $l = \sqrt[n]{A}$, vem o resultado seguinte:

$$\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{A} = \frac{u-A}{\sqrt[n]{u^{n-1}} + \sqrt[n]{A} \sqrt[n]{u^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{A^{n-1}}}.$$

Se representarmos pois por B um numero positivo, inferior a A , vê-se que u , tendendo para A , pôde tornar-se maior do que B e que é, para os valores de u que satisfazem a esta condição,

$$|\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{A}| < \frac{|u-A|}{n \sqrt[n]{B^{n-1}}}.$$

Suppondo agora

$$\frac{|u-A|}{n \sqrt[n]{B^{n-1}}} < \delta, \quad n \delta \sqrt[n]{B^{n-1}} = \varepsilon,$$

vê-se que a cada valor de δ corresponde um numero ε tal que é $|\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{A}| < \delta$, quando $|u-A| < \varepsilon$, e portanto que $\sqrt[n]{u}$ tende para $\sqrt[n]{A}$, quando u tende para A .

17. Tudo o que se disse nos numeros precedentes estende-se facilmente ao caso de u depender de muitas quantidades variaveis x, y, z , etc. Assim, temos primeiramente:

É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A , quando x, y , etc. tendem respectivamente para a, b , etc., e para que este limite seja unico, quaesquer que sejam os valores pelos quaes passem estas variaveis, que a cada valor dado á quantidade positiva δ ,

por mais pequeno que seja, corresponda um numero ε tal que a desigualdade

$$(3) \quad |A - u| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de x, y , etc. que verificam as condições

$$(6) \quad |x - a| < \varepsilon, \quad |y - b| < \varepsilon, \quad \text{etc.}$$

Com effeito, sendo (x_1, x_2, x_3, \dots) , (y_1, y_2, y_3, \dots) , etc. series de valores que tendam respectivamente para a, b, \dots e u_1, u_2, u_3, \dots os valores de u correspondentes aos valores (x_1, y_1, \dots) , (x_2, y_2, \dots) , ..., se a desigualdade $|A - u| < \delta$ é satisfeita por todos os valores de u que correspondem aos valores que tomam respectivamente x, y, \dots entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, entre $b - \varepsilon$ e $b + \varepsilon$, etc., é satisfeita pelos numeros u_m, u_{m+1}, \dots , que correspondem aos valores (x_m, x_{m+1}, \dots) , (y_m, y_{m+1}, \dots) , etc., respectivamente comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, entre $b - \varepsilon$ e $b + \varepsilon$, etc. Logo os numeros u_1, u_2, \dots tendem para A .

Para demonstrar a proposição reciproca, supponhamos que u tende para A , e vamos primeiramente mostrar que se póde determinar ε de modo que a desigualdade (3) seja satisfeita pelos valores de x, y, \dots que satisfazem á condição

$$(7) \quad |x - a| + |y - b| + \dots < m\varepsilon,$$

onde m representa o numero das variaveis x, y, \dots

Com effeito, se isto não tivesse logar, mostrava-se como no n.º 15-1.ª a possibilidade de formar series (x_i, x_j, \dots) , (y_i, y_j, \dots) , etc. de valores de x, y, \dots , que tenderiam respectivamente para os limites a, b, \dots , taes que u não tenderia para A quando x, y, \dots passassem por estes valores. Basta agora notar que a desigualdade (7) é satisfeita pelos valores de x, y, \dots que satisfazem ás condições (6), para concluir que a desigualdade (3) é satisfeita pelos mesmos valores de x, y , etc.

A extensão dos outros principios demonstrados nos numeros anteriores ao caso de muitas variaveis não tem difficuldade alguma.

18. Díz-se que uma quantidade variavel *tende para* ∞ , quando esta quantidade augmenta indefinidamente de tal modo que chega a ser e a conservar-se superior a todo o numero dado, por maior que seja, e diz-se que uma quantidade variavel *tende para* $-\infty$, quando esta quantidade é negativa e o seu valor absoluto tende para ∞ .

Assim, por exemplo, os valores por que passa x^n , quando n passa pelos valores $1, 2, 3, 4, \dots$, tendem para ∞ , quando $|x| > 1$. Pondo com effeito $|x| = 1 + h$, onde $h > 0$, temos

$$|x|^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \dots > 1 + nh;$$

e basta attender a que o ultimo membro d'esta desigualdade se pôde tornar maior do que qualquer numero k , dando a n valores superiores a $\frac{k-1}{h}$, para concluir que x^n tende para ∞ .

Se notarmos que $\frac{1}{x}$ tende para 0, quando x tende para o infinito, e que tende para o infinito, quando x tende para 0, podemos dos theoremas anteriormente demonstrados para o caso de x tender para um limite a deduzir outros correspondentes para o caso de x tender para o infinito. Assim, por exemplo, podemos enunciar o theorema seguinte:

A somma, o producto e o quociente de duas funcções u e v que tendem para os limites A e B , quando x tende para o infinito, tendem respectivamente para $A+B$, AB e $\frac{A}{B}$ (quando B é differente de zero).

Com effeito, u e v tendendo para A e B , quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, $u+v$, uv , $\frac{u}{v}$ tendem para $A+B$, AB , $\frac{A}{B}$, quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, isto é quando x tende para o infinito.

19. Consideremos agora a quantidade imaginaria $u+iv$, que passa successivamente pelos valores u_1+iv_1 , u_2+iv_2 , etc. Se u tende para A e v tende para B , diz-se que esta quantidade tende para o limite $A+iB$.

São consequencias immediatas desta definição os principios seguintes:

I. É condição necessaria e sufficiente para que $u+iv$ tenda para o limite $A+iB$, que o módulo da differença entre a quantidade $u+iv$ e $A+iB$ tenda para zero.

Com effeito, se u e v tendem para A e B , a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades

$$|A-u_n| < \delta, |B-v_n| < \delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1 . Logo a desigualdade

$$|A-u_n+i(B-v_n)| = \sqrt{(A-u_n)^2 + (B-v_n)^2} < \delta\sqrt{2}$$

é satisfeita pelos mesmos valores de n , e o módulo considerado tende portanto para zero.

Reciprocamente, se é

$$\sqrt{(A-u_n)^2 + (B-v_n)^2} < \delta\sqrt{2},$$

quando $n > n_1$, é tambem

$$|A-u_n| < \delta\sqrt{2}, |B-v_n| < \delta\sqrt{2},$$

e portanto u tende para A e v tende para B .

II. É condição necessária e suficiente para que $u + iv$ tenda para um limite, que a cada valor que se dê á quantidade δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desigualdade

$$(8) \quad |u_{n+p} - u_n + i(v_{n+p} - v_n)| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p .

Deduz-se facilmente este theorema da igualdade (n.º 11)

$$|u_{n+p} - u_n + i(v_{n+p} - v_n)| = \sqrt{(u_{n+p} - u_n)^2 + (v_{n+p} - v_n)^2}.$$

Com effeito, se $u + iv$ tende para um limite, a cada valor da quantidade δ corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades (n.º 14)

$$|u_{n+p} - u_n| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |v_{n+p} - v_n| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p . Logo tambem a desigualdade (8) é satisfeita pelos mesmos valores de n e p , o que demonstra a primeira parte do theorema.

Reciprocamente, se δ representa uma quantidade tão pequena quanto se queira, e é satisfeita a desigualdade (8) quando $n > n_1$, qualquer que seja p , temos

$$(u_{n+p} - u_n)^2 + (v_{n+p} - v_n)^2 < \delta^2;$$

logo as desigualdades

$$|u_{n+p} - u_n| < \delta, \quad |v_{n+p} - v_n| < \delta$$

são satisfeitas pelos mesmos valores de n e p . As variaveis u e v tendem pois (n.º 11) para limites determinados, assim como $u + iv$.

V

Series

20. *Series de termos reaes.* — As series são expressões da fórmula

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

em que o numero das parcellas é infinito. O termo u_n é o *termo geral*, por meio do qual se formam todos os outros dando a n os valores 1, 2, 3, etc. Empregando o signal Σ para designar sommas, esta expressão pôde ser escripta do modo seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Se a somma dos n primeiros termos da serie, isto é, a somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

tende para um limite determinado, quando n augmenta indefinidamente, diz-se que a serie é *convergente*. Este limite chama-se *somma da serie*.

As series que não são convergentes chamam-se *divergentes*.

EXEMPLO 1.^o — A progressão geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

é convergente, quando o valor absoluto da razão x é menor do que a unidade, pois que a somma dos seus n primeiros termos

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

tende para o limite $\frac{1}{1-x}$, quando n augmenta indefinidamente.

Podemos pois escrever

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

E

Se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, ou se é $x = 1$, a somma s_n tende para o infinito e a serie é divergente.

Se é $x = -1$, a somma s_n toma alternadamente os valores zero e um , e portanto a serie é divergente.

EXEMPLO 2.º — A serie importante

$$(2) \quad \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \dots$$

é *convergente* quando $a > 1$, e é *divergente* quando $a = 1$ ou $a < 1$.

Seja primeiramente $a > 1$. Reuindo os termos em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^b , ... termos, a série considerada póde ser escripta do modo seguinte:

$$\frac{1}{1^a} + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \right) + \left(\frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{7^a} \right) + \dots + \left[\frac{1}{(2^b)^a} + \frac{1}{(2^b+1)^a} + \dots + \frac{1}{(2^{b+1}-1)^a} \right] + \dots$$

Notando agora que a somma dos termos de cada grupo é menor do que o producto do primeiro termo pelo numero dos seus termos, temos

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} < \frac{1}{2^{a-1}},$$

$$\frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{7^a} < \frac{1}{2^{2(a-1)}},$$

.....

$$\frac{1}{(2^b)^a} + \frac{1}{(2^b+1)^a} + \dots + \frac{1}{(2^{b+1}-1)^a} < \frac{1}{2^{b(a-1)}},$$

.....;

e portanto

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} < 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \dots + \frac{1}{2^{b(a-1)}} + \dots$$

ou

$$s_n < \frac{2^{a-1}}{2^{a-1}-1}.$$

O segundo membro d'esta desigualdade tem um valor determinado; logo o primeiro

membro, que augmenta com n sem poder exceder este valor, tende para um limite, e a serie proposta é portanto convergente.

No caso de ser $a=1$, a serie (2) tem o nome de *serie harmonica* e é divergente. Para o demonstrar, basta dispôr os seus termos em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^b , ... termos, do modo seguinte:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^b+1} + \frac{1}{2^b+2} + \dots + \frac{1}{2^{b+1}}\right) + \dots$$

Com effeito, notando que a somma dos termos de cada grupo é maior do que o producto do ultimo termo do grupo pelo numero de termos, temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > \frac{1}{2},$$

.....

$$\frac{1}{2^b+1} + \frac{1}{2^b+2} + \dots + \frac{1}{2^{b+1}} > \frac{1}{2},$$

.....

Logo a somma s_n dos n primeiros termos da serie (2) póde tornar-se maior do que $\frac{m}{2}$, por maior que seja o valor do inteiro m , dando a n um valor sufficientemente grande; e a serie é portanto divergente.

Se é $a < 1$, temos

$$s_n = \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Quando n tende para o infinito, o segundo membro d'esta desigualdade tende para o infinito; logo tambem tende para o infinito o primeiro membro, e a serie proposta é portanto divergente.

Os geometras da antiga Grecia empregaram para o calculo de certas quantidades processos equivalentes ao uso de verdadeiras series. Este algorithmo só foi porém directamente considerado no seculo XVII, depois da publicação da *Arithmetica infinitorum* de Wallis, na qual se encontra um modo de determinar a área de qualquer curva, quando se sabe exprimir as ordenadas por serie ordenada segundo as potencias da abscissa.

*

Mercator e Brounker publicaram em 1668 os primeiros exemplos de taes desenvolvimentos. Mas o principal inventor do methodo das series foi Newton, que ensinou a calcular por meio d'ellas as expreesões algebricas, as raizes das equações algebricas, as expressões trigonometricas, etc., e que não só as applicou ao calculo das areas, seguindo a ideia de Wallis, mas tambem á rectificação das curvas. Sabe-se que estes importantes resultados foram obtidos pelo grande geometra antes de 1668, mas só foram publicados em 1704 em um appendice á sua *Optica*, intitulado *De quadratura curvarum*, e de novo em 1711 na sua *Analysis per aequationes numerorum terminorum infinitas*. N'este intervallo de tempo occuparam-se tambem das series J. Gregory e Leibnitz.

A partir d'esta epocha foram as series empregadas em mathematica com grande successo. Apesar porém de se reconhecer, desde os primeiros tempos em que foram usadas, a necessidade de serem convergentes, para determinarem os valores das quantidades, os geometras durante muito tempo estenderam a este algorithmo as operações e theoremas relativos ás expressões compostas de um numero finito de parcelas, sem procurar as condições para que esta extensão fosse legitima. Foi sómente no ultimo seculo que foram fixadas as regras para o seu calculo por Cauchy, no seu *Cours d'Analyse*, e por Abel, Dirichlet, Gauss e Riemann, em trabalhos sobre series particulares, que os levaram a estudar questões geraes relativas a estas expressões. Outros geometras se occuparam depois d'este assumpto, já enriquecendo-o com novos theoremas, já generalizando os anteriores.

21. Do theorema demonstrado no n.º 14 tiram-se immediatamente os dous principios seguintes, conhecidos pelo nome de *principios geraes de convergencia e divergencia*:

1.º — Se a serie (1) é convergente, a cada valor dado á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um numero n_1 tal que a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p .

2.º — Reciprocamente, se a cada valor dado á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um numero n_1 tal que a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , a serie (1) é convergente.

Destes principios tira-se, pondo $p=1$, o corollario seguinte:

É condição necessaria (mas não sufficiente) para que a serie (1) seja convergente, que o valor dos seus termos tenda para zero, quando a ordem d'elles augmenta indefinidamente.

22. Não ha criterio geral para decidir se uma serie dada é convergente; ha apenas regras abrangendo maior ou menor numero de casos. Aqui exporemos apenas as seguintes:

I. *Sejam*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

duas series compostas de termos positivos, e seja p um numero determinado. Se, a partir do termo de ordem p , é sempre $u_m < v_m$ e a segunda serie é convergente, a primeira tambem é convergente; se, pelo contrario, é $u_m > v_m$ e a segunda serie é divergente, a primeira tambem é divergente.

Com effeito, se é $u_m < v_m$ quando $m \geq p$, temos

$$u_1 + \dots + u_{p-1} + u_p + \dots + u_n < u_1 + \dots + u_{p-1} + v_p + \dots + v_n,$$

e portanto, representando s_n e s'_n as sommas dos n primeiros termos da primeira e da segunda serie e s' o limite para que tende s'_n , quando n augmenta indefinidamente,

$$s_n < s'_n + u_1 + \dots + u_{p-1} < s' + u_1 + \dots + u_{p-1}.$$

A somma s_n augmenta pois indefinidamente com n , sem poder exceder o valor que tem o segundo membro d'esta desigualdade; logo (n.º 14) tende para um limite determinado.

Se, pelo contrario, é $u_m > v_m$ e a segunda serie é divergente, temos a desigualdade

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{p-1} + u_p + \dots + u_n > v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$$

ou

$$s_n > s'_n - (v_1 + v_2 + \dots + v_{p-1}),$$

cujo segundo membro augmenta indefinidamente com n ; logo tambem o primeiro membro augmenta indefinidamente com n , e portanto a primeira serie é divergente.

Por exemplo, a serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^n} + \dots$$

é convergente, pois que cada termo, a partir do terceiro, é menor do que o termo correspondente da progressão geometrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

II. *Toda a serie composta de termos positivos e negativos, de que deriva uma serie convergente pela mudança dos signaes dos termos negativos, é convergente* ⁽¹⁾.

(1) Cauchy : *Cours d'Analyse*, cap. VI.

Com effeito, a serie

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

sendo, por hypothese, convergente, a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, deve corresponder (n.º 21-1.º) um numero n_1 tal que

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p . D'aqui conclue-se que a desigualdade (n.º 11-I)

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \delta$$

tambem é satisfeita pelos mesmos valores de n , e portanto que a serie (1) é convergente.

As series que estão no caso indicado neste theorema, isto é as series formadas de termos cujos valores absolutos formam uma serie convergente, chamam-se *absolutamente convergentes*.

III. *Se, para todos os valores de n a partir de um valor p , a razão $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ dos valores absolutos de dous termos consecutivos da serie (1) é sempre menor do que uma quantidade L , inferior á unidade, a serie é convergente; se esta razão é maior do que a unidade, a serie é divergente* ⁽¹⁾.

Este criterio importante, devido a D'Alembert, resulta da comparação da serie proposta com uma progressão geometrica, como vamos vêr.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < L |u_p|, |u_{p+2}| < L |u_{p+1}|, \text{ etc.};$$

logo os termos da serie

$$(3) \quad |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

são, a partir do termo de ordem p , menores do que os termos correspondentes da serie

$$|u_1| + |u_1| + \dots + |u_{p-1}| + |u_p| (1 + L + L^2 + \dots),$$

que é convergente quando $L < 1$, por ser neste caso convergente a progressão

$$1 + L + L^2 + \dots$$

⁽¹⁾ Vejam-se nos tomos VII e VIII do *Jornal de Sciencias mathematicas* algumas observações interessantes de *Lerch*, *Cesàro*, *Güttzmer* e *Ed. Weyr* a respeito d'este theorema e dos dois seguintes.

Logo a serie (3) é convergente (th. I), assim como a serie (1) (th. II).

Se é, pelo contrario,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1,$$

o valor absoluto dos termos da serie (1), a partir do termo de ordem p , cresce com n , e portanto a serie é divergente (n.º 21).

COROLLARIO. — Se a razão $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tende para um limite determinado, quando n augmenta indefinidamente, a serie é convergente se este limite é menor do que a unidade, e é divergente se este limite é maior do que a unidade.

Sejam l este limite e L um valor comprehendido entre l e 1.

Os valores que toma a quantidade $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ podem approximar-se de l tanto que seja

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L < 1,$$

quando $l < 1$, e

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1,$$

quando $l > 1$, dando para isso a n valores superiores a um numero sufficientemente grande p . Em virtude do theorema precedente a serie é pois convergente no primeiro caso e divergente no segundo.

Por exemplo, a serie

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \dots + \frac{x^n}{2.3\dots n} + \dots$$

é convergente, qualquer que seja o valor que se dê a x , pois que a razão dos valores absolutos de dous termos consecutivos

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|$$

tende para 0 quando n augmenta indefinidamente.

IV. Se, para todos os valores de n a partir de um numero determinado p , a raiz $\sqrt[n]{|u_n|}$ é menor do que uma quantidade L , inferior á unidade, a serie (1) é convergente; se esta raiz é maior do que a unidade, a serie é divergente.

Temos, por hypothese,

$$|u_p| < L^p, u_{p+1} < L^{p+1}, \text{ etc.};$$

logo os termos da serie

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

são, a partir do termo de ordem p , menores do que os termos correspondentes da serie convergente

$$|u_1| + \dots + |u_{p-1}| + L^p (1 + L + L^2 + \dots).$$

Logo, aquella serie é convergente, assim como a serie (1).

Se temos $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, é tambem $|u_n| > 1$, quando $n > p$, e portanto a serie (1) é divergente.

Do theorema que vimos de demonstrar, devido a Cauchy (l. c.), deduz-se um corollario analogo ao que se deduziu do theorema anterior.

Por exemplo, a serie

$$\frac{1}{(\log 2)^2} + \frac{1}{(\log 3)^3} + \dots + \frac{1}{(\log n)^n} + \dots$$

é convergente, visto que é

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$$

V. Se existir um numero a , maior do que a unidade, tal que, para todos os valores de n , a partir de um numero determinado p , o producto $n^a |u_n|$ seja menor do que uma quantidade fixa K , a serie é convergente (Cauchy, l. c.).

Com effeito, por ser

$$|u_p| < \frac{K}{p^a}, |u_{p+1}| < \frac{K}{(p+1)^a}, \text{ etc.},$$

os termos da serie

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots,$$

a partir do termo de ordem p , são menores do que os termos correspondentes da serie convergente (n.º 20).

$$|u_1| + \dots + |u_{p-1}| + K \left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \dots \right).$$

Logo aquella serie é convergente, e portanto é tambem convergente (th. II) a serie (1).

Se existir um numero a , igual ou inferior á unidade, tal que, para todos os valores de n ,

a partir de um numero determinado p , os termos da serie (1) sejam positivos e o producto $n^a u_n$ seja maior do que um numero fixo K , a serie (1) é divergente.

Com effeito, temos

$$u_p > \frac{K}{p^a}, u_{p+1} > \frac{K}{(p+1)^a}, \text{ etc.},$$

e portanto, a partir da ordem p , os termos da serie (1) são maiores do que os termos correspondentes da serie divergente

$$u_1 + \dots + u_{p-1} + K \left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \dots \right).$$

Logo a serie (1) é divergente.

Assim, por exemplo, a serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

é divergente, por ser

$$nu_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} > \frac{1}{2}.$$

VI. Seja L uma quantidade positiva e

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

um grupo composto de um numero infinito de numeros positivos. Se a desigualdade

$$a_n \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - a_{n+1} > L$$

for satisfeita pelos valores de n superiores a um numero p , a serie é convergente.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < \frac{1}{L} [a_p |u_p| - a_{p+1} |u_{p+1}|],$$

$$|u_{p+2}| < \frac{1}{L} [a_{p+1} |u_{p+1}| - a_{p+2} |u_{p+2}|],$$

$$\dots\dots\dots,$$

F

e portanto

$$|u_{p+1}| + \dots + |u_{p+m}| < \frac{1}{L} [a_p |u_p| - a_{p+m} |u_{p+m}|] < \frac{a_p |u_p|}{L},$$

por maior que seja m . Logo

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| < |u_1| + \dots + |u_p| + \frac{a_p |u_p|}{L}.$$

Quando n tende para ∞ , o primeiro membro desta desigualdade augmenta sempre, sem todavia poder exceder o valor determinado do segundo membro, e portanto tende para um limite. Logo a serie

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

é convergente, assim como (n.º 22-II) a serie (1).

D'este theorema, devido a Kummer⁽¹⁾, tira-se como corollario, pondo $a_n = n$, o theorema seguinte, devido a Raabe⁽²⁾:

Se a desigualdade

$$n \left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1 \right) > 1 + L$$

for satisfeita por todos os valores de n superiores a um numero p , a serie (1) é convergente.

VII. *Sejam u_1, u_2 , etc. quantidades positivas e*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

uma serie cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Se u_n decresce constantemente e tende para zero, quando n cresce indefinidamente, esta serie é convergente.

Com effeito, por ser cada termo da serie considerada maior do que o seguinte, a differença

$$s_{n+p} - s_n = \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots]$$

tem o signal do primeiro termo. Mas esta differença póde ser escripta do modo seguinte:

$$\pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots],$$

e vê-se então que o seu valor absoluto é menor do que u_{n+1} , pois que esta expressão deve

(1) *Jornal de Crelle*, t. XIII, 1835.

(2) *Zeitschrift für Mathematik*, t. X, 1832.

ter o signal do primeiro termo. Temos pois

$$(A) \quad |s_{n+p} - s_n| < u_{n+1}.$$

Por outra parte, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde, por hypothese, um numero n_1 tal que é $u_{n+1} < \delta$, quando $n > n_1$.

Logo a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , e a serie considerada é portanto (21-2.º) convergente.

Por exemplo, a serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

é convergente.

NOTA. — Fazendo na formula (A) tender p para o infinito e notando que s_{n+p} tende para a somma s da serie considerada, é facili de ver que o erro que se commette, quando se toma para valor approximado de s a somma dos n primeiros termos da serie, é menor do que o primeiro termo desprezado (1).

23. *Series de termos imaginarios.* — Consideremos agora as series compostas de termos imaginarios:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_m + iy_m) + \dots$$

ou

$$(4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} (x_m + iy_m) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m.$$

Se as series

$$(5) \quad \sum_{m=1}^{\infty} x_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} y_m$$

são convergentes, a serie (4) diz-se *convergente*. Neste caso a somma s_n dos seus n primeiros termos, isto é a somma

$$s_n = \sum_{m=1}^n (x_m + iy_m) = \sum_{m=1}^n x_m + i \sum_{m=1}^n y_m,$$

tende para um limite determinado, que se chama *somma da serie* (4).

(1) Outros criterios para reconhecer a convergencia das series foram dados por Gauss (*Werke*, t. III, pag. 139), Morgan (*Dif. Cal.*, London, 1836), Bertrand (*Journal de Liouville*, t. VII, pag. 37), etc.

A respeito de convergencia das series de termos imaginarios vamos demonstrar os theoremas seguintes:

THEOREMA 1.º — *É condição necessaria e sufficiente para que a serie (4) seja convergente, que a cada valor dado á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 , tal que a desigualdade*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} x_m + i \sum_{n+1}^{n+p} y_m \right| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p .

Esta proposição é uma consequencia immediata do theorema II do n.º 19.

THEOREMA 2.º — *Para que a serie (4) seja convergente, basta que a serie formada pelos módulos dos seus termos o seja.*

Com effeito, das desigualdades

$$|x_m| < \sqrt{x_m^2 + y_m^2}, \quad |y_m| < \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

deduz-se (n.º 22-I) que, quando a serie

$$(6) \quad \sum_1^{\infty} \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

é convergente, tambem são convergentes as series

$$(7) \quad \sum_1^{\infty} |x_m|, \quad \sum_1^{\infty} |y_m|.$$

Logo as series (5) são (n.º 22-II) convergentes, assim como a serie (4).

O theorema reciproco do precedente não é sempre verdadeiro, isto é, póde ser convergente a serie (4) e não o ser a serie correspondente dos módulos. Ha porém um caso importante em que esta proposição reciproca é verdadeira, que é quando as series (7) são convergentes. Com effeito, temos

$$\sqrt{x_m^2 + y_m^2} < |x_m| + |y_m|,$$

e portanto

$$\sum_1^n \sqrt{x_m^2 + y_m^2} < \sum_1^n |x_m| + \sum_1^n |y_m|.$$

Quando n augmenta indefinidamente, o segundo membro desta desigualdade tende, por hypothese, para um limite, e o primeiro membro augmenta constantemente, sem poder exceder este limite. Logo tende tambem para um limite, e a serie (6) é portanto convergente.

24. Series absolutamente convergentes.—As series formadas de termos cujos modulos formam uma serie convergente, chamam-se *series absolutamente convergentes*. A respeito d'estas series vamos demonstrar o seguinte theorema importante, devido a Dirichlet.

THEOREMA 3.º — *A somma de uma serie absolutamente convergente não se altera quando se muda a ordem dos seus termos.*

Seja s_n a somma dos n primeiros termos da serie dada, s a somma desta serie e s'_p a somma dos p primeiros termos da nova serie, que resulta de mudar a ordem dos termos da primeira. Suppondo que se dá a p um valor sufficientemente grande para que s'_p contenha todos os termos de s_n , e chamando u_α, u_β , etc. os termos que aquella somma contém a mais, vem

$$s'_p = s_n + u_\alpha + u_\beta + \dots + u_p;$$

e portanto, attendendo ao theorema 1.º do n.º 11,

$$|s'_p - s| \leq |s_n - s| + |u_\alpha| + |u_\beta| + \dots + |u_p|$$

$$\leq |s_n - s| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_p|.$$

Por ser convergente a serie $\sum_{m=1}^{\infty} |u_m|$, o segundo membro desta desigualdade tende para zero quando n tende para o infinito; logo s'_p tende para o limite s , quando p tende para o infinito.

No que precede suppozemos que cada termo occupa, depois de feita a mudança da ordem dos termos da serie, um logar tal que a differença entre os numeros que indicam a sua ordem antes e depois da mudança seja finita. Supponhamos agora que se agrupam separadamente os termos da serie, em numero infinito, que satisfazem a determinadas condições, e sejam $s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, \dots$ as sommas das novas series assim formadas. Dando a p um valor sufficientemente grande para que $s^{(1)} + s^{(2)} + \dots + s^{(p)}$ contenha todos os termos de s_n , temos, como no caso anterior, a desigualdade

$$|s^{(1)} + s^{(2)} + \dots + s^{(p)} - s| \leq |s_n - s| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots,$$

a qual faz vêr que a somma $s^{(1)} + s^{(2)} + \dots + s^{(p)}$ tende para o limite s , quando p tende para o infinito.

COROLLARIO. — *Em qualquer serie formada de termos reaes póde alterar-se a ordem das parcelas, sem mudar o valor da serie, se, dando a todos os termos da serie o signal +, resultar uma serie convergente.*

NOTA. — A respeito do theorema que precede faremos a seguinte observação:

Se a serie proposta não for absolutamente convergente, não se póde mudar a ordem dos seus termos, porque d'esta mudança podem provir ou novas series convergentes com valores differentes da primeira ou series divergentes. É o que se vê no exemplo (4):

$$U = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \dots$$

Com effeito, dando outra disposição aos termos d'esta serie, vem, representando por n um numero impar,

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{2}{2}\right) - \frac{2}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{6}\right) - \frac{2}{8} + \dots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2n}\right) - \frac{2}{2n+2} + \dots \\ & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} U. \end{aligned}$$

Accrescentaremos ao que precede que as series que não são absolutamente convergentes são chamadas por alguns auctores *semi-convergentes*; que se póde dar, como mostrou Riemann (2), aos termos de qualquer serie semi-convergente uma ordem tal que a somma da nova serie tome um valor arbitrariamente dado; e finalmente que é sempre possivel, segundo notou Ed. Weyr (3), reunir os termos d'aquella serie em grupos que formem uma serie absolutamente convergente.

25. Operações sobre series. — Passando agora ás operações sobre series, demonstraremos a este respeito os dous theoremas seguintes, devidos a Cauchy (l. c.):

THEOREMA 4.º — *Se as series*

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

forem convergentes e se as suas sommas forem s e s' , tambem a serie cujo termo geral é $u_n + v_n$ será convergente, e a sua somma será igual a $s + s'$.

(1) Longchamps: *Algèbre* (Paris, 1889), pag. 166.

(2) Riemann: *Oeuvres complètes*, (Paris, pag. 234).

(3) Ed. Weyr: *Deux remarques relatives aux séries* (*Jornal de Sciencias Mathematicas*, t. VIII).

Com effeito, a somma dos n primeiros termos da nova serie é

$$\sum_{1}^n u_n + \sum_{1}^n v_n,$$

e esta somma tende para o limite $s \mp s'$.

THEOREMA 5.º — Se as series precedentes forem absolutamente convergentes, a serie

$$(A) \quad \begin{cases} u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots \\ + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots \end{cases}$$

é convergente e a sua somma é igual ao producto ss' das sommas das series consideradas ⁽¹⁾.

Como as series propostas são, por hypothese, absolutamente convergentes, as series

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots, |v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots$$

são convergentes. Sejam pois S e S' as suas sommas e σ_n a somma dos n primeiros termos da serie

$$|u_1| |v_1| + (|u_1| |v_2| + |u_2| |v_1|) + \dots$$

$$+ (|u_1| |v_n| + |u_2| |v_{n-1}| + \dots + |u_n| |v_1|) + \dots$$

Teremos a desigualdade

$$\begin{aligned} \sigma_n &= |u_1| [|v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|] \\ &\quad + |u_2| [|v_1| + |v_2| + \dots + |v_{n-1}|] \\ &\quad + \dots \\ &< |u_1| S' + |u_2| S' + \dots + |u_n| S' < SS', \end{aligned}$$

a qual mostra que σ_n tende para um limite (n.º 14-1.º), quando n tende para o infinito, e portanto que a serie anterior é convergente.

Vê-se pois que a serie (A) é *absolutamente* convergente. Para achar a sua somma, basta dispor os seus termos do modo seguinte (n.º 24):

$$u_1(v_1 + v_2 + v_3 + \dots) + u_2(v_1 + v_2 + v_3 + \dots) + \dots,$$

(¹) Veja-se no tomo cxxix, pag. 182, do *Jornal de Crelle*, uma extensão d'este theorema, devida a Mertens.

para concluir que esta somma é igual ao producto

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \dots),$$

cujos valores é ss' .

26. *Series cujos termos dependem de uma variavel.* — Consideremos ainda a serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m$$

e supponhamos que os seus valores dependem de uma variavel z , igual a $x + iy$, que toma um numero infinito de valores, z' , z'' , z''' , etc.

Se esta serie é convergente nos pontos z' , z'' , etc., a cada valor da quantidade positiva δ e a cada valor de z corresponde um numero n_1 , tal que é (n.º 23-1.º)

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p .

Se a todos os valores de z considerados corresponde o mesmo valor de n_1 , diz-se que a serie é *uniformemente convergente nos pontos* z' , z'' , etc.

Se os valores de z considerados são representados geometricamente pelos pontos de uma linha ou de uma área dada, diz-se que a serie é *uniformemente convergente na linha* ou *na área dada*. Se é $y=0$ e os valores z' , z'' , etc. representam todos os valores de z desde um numero A até um numero B, diz-se que a serie é *uniformemente convergente no intervallo de A a B*.

Chamando s a somma da serie considerada, s_n a somma dos n primeiros termos e R_n a somma dos restantes, e fazendo tender na desigualdade precedente p para o infinito, temos, quando a serie é uniformemente convergente,

$$|s - s_n| = |R_n| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja z .

Reciprocamente, se a serie proposta for convergente e a cada valor de δ corresponder um numero n_1 tal que seja $|R_n| < \delta$, quando $n > n_1$, qualquer que seja z , a serie é *uniformemente convergente*. Com effeito, das desigualdades

$$|R_n| = |s - s_n| < \delta, \quad |R_{n+p}| = |s - s_{n+p}| < \delta,$$

que têm logar, por hypothese, quando $n > n_1$, tira-se a desigualdade

$$|s_{n+p} - s| = |s_{n+p} - s - \varepsilon_n + s| < 2\delta,$$

que tem logar também quando $n > n_1$, qualquer que seja z , e que mostra portanto que a série é uniformemente convergente.

I. THEOREMA 6.º — *Se os módulos (ou os valores absolutos) dos termos da série proposta forem, qualquer que seja z , inferiores aos termos correspondentes de uma série convergente, composta de termos positivos constantes, a série proposta é uniformemente convergente.*

Com effeito, sendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ os termos d'esta ultima série, temos, para todos os valores de z considerados,

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \dots + \varepsilon_{n+p}.$$

Mas, por hypothese, a cada valor de δ corresponde um numero n_1 , tal que é

$$\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \dots + \varepsilon_{n+p} < \delta,$$

quando $n > n_1$.

Logo é também

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja z , e a série Σu_m é portanto uniformemente convergente.

II. Para se vêr um exemplo de uma série que, sendo convergente, não é todavia uniformemente convergente, consideremos a expressão

$$(1-x)x + (1-x)x^2 + \dots + (1-x)x^m + \dots,$$

onde supomos que x é real e que varia desde 0 até 1. Neste intervallo esta série é convergente, mas não é uniformemente convergente, porque a desigualdade

$$|R_n| = (1-x)x^{n+1} + (1-x)x^{n+2} + \dots = x^{n+1} < \delta$$

dá $x < \delta^{\frac{1}{n+1}} < 1$, quando $\delta < 1$; e portanto vê-se que não existe valor algum finito de n tal que aquella desigualdade seja satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre 0 e 1.

27. Consideremos agora as séries ordenadas segundo as potencias de uma variavel, isto é as séries da fórma

$$(8) \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m, \quad z = x + iy,$$

e demonstremos os seguintes theoremas, devidos a Abel:

THEOREMA 7.º — *Se existir um numero positivo a , que, substituido em (8) no logar do mó-*

G

dulo de z , torne os módulos de todos os termos da serie inferiores a uma quantidade finita B , a serie (8) é absolutamente convergente, quando $|z| < \alpha$.

Seja z_1 um valor de z de módulo menor do que α . Por ser, por hypothese, $|c_m| \alpha^m < B$, temos

$$|c_m| |z_1|^m < B \left| \frac{z_1}{\alpha} \right|^m;$$

e portanto os termos da serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m| |z_1|^m$$

são menores do que os termos correspondentes da progressão

$$\sum_{m=1}^{\infty} B \left| \frac{z_1}{\alpha} \right|^m.$$

Logo aquella serie é (n.º 22-I e II) absolutamente convergente.

NOTA. — O theorema que vimos de considerar mostra que todos os valores de $|z|$ podem ser divididos em dois grupos, separados por um numero R , o primeiro compostos dos valores de $|z|$ para os quaes a serie (8) é convergente, e o segundo composto dos valores de $|z|$ para os quaes esta serie é divergente. Os numeros do primeiro grupo são menores do que R e os numeros do segundo grupo são maiores do que R . Como os valores de z , cujo módulo é menor do que R , são representados (n.º 12) pelos pontos do interior de um circulo de raio R com o centro na origem das coordenadas, vê-se que a serie (8) é convergente quando z representa um ponto interior a este circulo, e divergente quando z representa um ponto exterior. A este circulo, cuja consideração é devida a Cauchy, chama-se *circulo de convergencia* da serie (8).

O theorema precedente nada diz relativamente á convergencia ou divergencia da serie (8), quando z representa pontos collocados sobre a circumferencia do circulo de convergencia.

Deve-se observar que a serie (8) póde ser convergente sómente no ponto $z=0$, e n'este caso o raio do circulo de convergencia é nullo; e que póde ser convergente qualquer que seja o valor que se dê a z , e n'este caso diz-se que o raio do circulo de convergencia é infinito.

O estudo das series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z-a$, isto é o estudo das series da fórma

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (z-a)^m,$$

reduz se, pondo $z-a=t$, ao da serie que vimos de considerar. Neste caso existe ainda um circulo de convergencia, cujo centro é o ponto que representa a .

THEOREMA 8.º — *Toda a serie ordenada segundo as potencias de uma variavel z , que é convergente quando $|z| < R$, é uniformemente convergente para todos os valores de z que satisfazem á condição $|z| \leq \rho$, sendo $\rho < R$.*

Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad z = x + iy$$

a serie proposta.

Por ser esta serie absolutamente convergente quando $|z| < R$, a serie $\sum |c_n| \rho^n$ é convergente. Temos porém, por hypothese, $|c_n| |z|^n < |c_n| \rho^n$. Logo a serie considerada é, em virtude do theorema 6.º, uniformemente convergente quando $|z| \leq \rho$.

Por exemplo, a serie

$$1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \dots + \frac{z^n}{1.2\dots n} + \dots$$

é convergente, qualquer que seja z , visto que a serie

$$1 + |z| + \frac{|z|^2}{1.2} + \dots + \frac{|z|^n}{1.2\dots n} + \dots$$

é sempre convergente. Logo o raio do circulo de convergencia d'aquella serie é infinito, e a serie é absoluta e uniformemente convergente em uma área qualquer.

Como segundo exemplo consideremos a serie

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1.2\dots n\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n + \dots$$

e supponhamos que α, β, γ são constantes.

A serie correspondente dos módulos é

$$1 + \left| \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} \right| |z| + \left| \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} \right| |z|^2 + \dots$$

$$+ \left| \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1.2\dots n\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \right| |z|^n + \dots,$$

e a razão de dois termos consecutivos

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)} \right| |z| = \left| \frac{\left(1 + \frac{\alpha-1}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta-1}{n}\right)}{1 + \frac{\gamma-1}{n}} \right| |z|$$

*

tende para $|z|$, quando n augmenta indefinidamente. Logo esta serie é convergente (n.º 22-III) quando $|z| < 1$, e divergente quando $|z| > 1$.

Logo o raio do circulo de convergencia da serie considerada é igual á unidade, e a serie é absoluta e uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro d'este circulo.

A serie precedente, que tem sido objecto de trabalhos importantes, tem o nome de serie *hypergeometrica*.

NOTA. É conveniente observar que, como corollario dos theoremas 7.º e 8.º, se conclue, pondo $y=0$, que os valores de x para os quaes a serie de termos reaes $\Sigma c_m x^m$ é convergente, estão comprehendidos entre dois numeros eguaes e de signal contrario, $-R$ e R , e que esta serie é absoluta e uniformemente convergente em qualquer intervallo $(-\rho, \rho)$, tal que seja $\rho < R$.

28. Series duplas. — Dá-se o nome de series duplas ás sommas $\Sigma u_n^{(m)}$ cujos termos se formam dando em $u_n^{(m)}$ a m e n uma infinidade de valores inteiros, positivos ou negativos.

Se dispozermos estes termos uns adiante dos outros, segundo uma ordem tal que não dê lugar a omissão alguma, obtem-se uma serie simples. Se esta serie fôr absolutamente convergente, a serie dupla diz-se tambem *absolutamente convergente*. Neste caso podemos mudar a ordem dos termos da serie simples (n.º 24), sem alterar a sua somma; e, como cada mudança no modo de disposição dos termos da serie dupla, para formar nova serie simples, corresponde a uma mudança no modo de disposição dos termos da serie dupla primeiramente formada, vê-se que todas as series simples, a que dá origem a serie dupla, têm a mesma somma. Esta somma é, por definição, a *somma* da serie dupla considerada.

Para ter o exemplo de uma distribuição dos termos da serie dupla, para formar uma serie simples, basta, quando n e m são positivos, ordenar os termos da serie dupla segundo a ordem crescente das sommas $m+n$ e, em cada grupo assim formado, segundo a ordem crescente de m ; o que dá

$$u_0^{(0)} + (u_1^{(0)} + u_0^{(1)}) + (u_2^{(0)} + u_1^{(1)} + u_0^{(2)}) + \dots$$

Como esta serie é, por hypothese, absolutamente convergente, podemos dispôr os seus termos do modo seguinte (n.º 24):

$$\begin{aligned} &u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + \dots \\ &+ u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \dots \\ &+ u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ou do modo seguinte:

$$\begin{aligned} &u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_0^{(2)} + \dots \\ &+ u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \dots \\ &+ u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Representando por $s^{(0)}, s^{(1)}, \dots$ as sommas das series que formam as linhas do primeiro quadro, por s_0, s_1, s_2, \dots as sommas das series que formam as linhas do segundo quadro, e por S a somma da serie dupla, temos

$$S = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \dots$$

e

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

Para considerar o caso de m e n representarem numeros inteiros, positivos e negativos, basta applicar o que precede á serie dupla

$$\Sigma (u_n^{(m)} + u_{-n}^{(m)} + u_n^{(-m)} + u_{-n}^{(-m)}),$$

onde n e m são positivos.

Terminaremos o que temos a dizer sobre as series duplas pelo seguinte theorema, de que se faz muitas vezes uso⁽¹⁾:

Se as series

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= |u_0^{(0)}| + |u_1^{(0)}| + |u_2^{(0)}| + \dots, \\ \sigma_1 &= |u_0^{(1)}| + |u_1^{(1)}| + |u_2^{(1)}| + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

forem convergentes, assim como a serie

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots,$$

a serie dupla $\Sigma u_n^{(m)}$ é absolutamente convergente.

Com effeito, dispondo os termos da serie $\Sigma |u_n^{(m)}|$ de modo a formar uma serie simples, a somma dos t primeiros termos d'esta serie cresce constantemente com t , sem poder exceder a somma da serie $\Sigma \sigma_n$. Logo aquella somma tende para um limite, quando t tende para o infinito, e a serie simples assim formada é absolutamente convergente; a serie $\Sigma u_n^{(m)}$ é portanto tambem absolutamente convergente.

(1) Cauchy: *Cours d'Analyse*; Nota 7.^a

VI

Productos infinitos

29. Consideremos agora as expressões da forma

$$(1) \quad (1 + a_1) (1 + a_2) \dots (1 + a_m) \dots,$$

em que o numero de factores é infinito, que, empregando o signal \prod para representar productos, podemos escrever do modo seguinte:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + a_m).$$

A cada expressão da forma precedente chama-se um *producto infinito*; e diz-se que este producto é convergente, se o producto

$$\prod_{m=1}^n (1 + a_m)$$

dos n primeiros factores tende para um limite determinado, quando n tende para o infinito. Este limite é o valor do producto infinito ⁽¹⁾.

I. Antes de procurar as condições de convergencia do producto (1), vamos demonstrar o seguinte lemma, de que teremos de fazer uso:

A média geometrica dos numeros A, B, C, etc. é sempre menor do que a média arithmetica dos mesmos numeros.

Esta proposição é devida a Cauchy e foi demonstrada por este eminente geometra do modo que vamos expôr ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Os productos infinitos foram considerados pela primeira vez por Wallis, que os empregou na sua *Arithmetica infinitorum* para o calculo da área do circulo, e depois por Euler, na sua admiravel *Introductio in Analysin infinitorum*, publicada em 1748, o qual exprimiu por este algorithmo o seno, o coseno, etc. Foram em seguida usados por Jacobi, Heine, Weierstrass, etc., como se verá em diversos logares d'esta obra. As condições para se empregarem no calculo foram estudadas por Kummer (*Jornal de Crelle*, t. xiii), Cauchy (*Cours d'Analyse*, Nota 9.^a), Weierstrass (*Jornal de Crelle*, li), etc.

⁽²⁾ Cauchy: *Cours d'Analyse*, Nota 2.^a

Seja n o numero das letras A, B, C , etc. Queremos provar que é sempre

$$\sqrt[n]{ABC\dots} < \frac{A+B+C\dots}{n},$$

ou que é

$$ABC\dots < \left(\frac{A+B+C\dots}{n}\right)^n.$$

Ora, em primeiro logar, temos evidentemente, quando é $n=2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

d'onde se conclue, pondo successivamente $n=4, n=8, \dots, n=2^m$,

$$\begin{aligned} ABCD &< \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4, \\ ABCDEFGH &< \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4 \\ &< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8, \\ &\dots\dots\dots \\ ABCD\dots &< \left(\frac{A+B+C+\dots}{2^m}\right)^{2^m}. \end{aligned}$$

Em segundo logar, se n não é um termo da progressão geometrica 2, 4, 8, 16, etc., designe-se por 2^m um termo d'esta progressão, superior a n , ponha-se

$$K = \frac{A+B+C+\dots}{n}$$

e eguallem-se a K as $2^m - n$ ultimas quantidades que entram nos dois membros d'esta desigualdade. Teremos

$$ABCD\dots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+\dots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, substituindo K pelo seu valor,

$$ABCD\dots < \left(\frac{A+B+C+\dots}{n}\right)^n,$$

que é o que se queria demonstrar.

II. Posto isto, vamos procurar as condições de convergencia do producto (1), suppondo primeiramente que as quantidades a_1, a_2, a_3 , etc. são reaes e positivas.

Vimos de vêr que a média arithmetica de p quantidades positivas é maior do que a sua média geometrica; portanto, sendo q d'estas quantidades eguaes a A e as restantes eguaes a B , temos

$$\left(\frac{qA + (p-q)B}{p}\right)^p > A^q B^{p-q}.$$

Pondo n'esta desigualdade

$$A = 1 + \beta \frac{p}{q}, \quad B = 1,$$

vem

$$(1 + \beta)^p > \left(1 + \beta \frac{p}{q}\right)^q,$$

ou, pondo $\beta = 1$,

$$2^p > \left(1 + \frac{p}{q}\right)^q.$$

Temos pois, pondo $\gamma = \frac{p}{q} > 1$,

$$2^\gamma > 1 + \gamma > 1 + \frac{1}{2}\gamma.$$

Se fôr $0 < \gamma < 1$, a fórmula precedente dá, mudando γ em $1 + \gamma$,

$$2^{1+\gamma} > 1 + (1 + \gamma),$$

e portanto temos tambem n'este caso

$$2^\gamma > 1 + \frac{1}{2}\gamma.$$

Em virtude d'esta desigualdade virá, pondo $\gamma = 2a_m$,

$$(A) \quad 1 + a_m < 2^{2a_m}$$

e portanto

$$\prod_{m=1}^n (1 + a_m) < \prod_{m=1}^n 2^{2a_m} = 2^{2s_n}, \quad s_n = \sum_{m=1}^n a_m.$$

Se a serie Σa_m é convergente, a sua somma é inferior a um numero racional α , e temos

$$\prod_{m=1}^n (1 + a_m) < 2^{2\alpha};$$

portanto $\prod_1^n (1 + a_m)$ tende para um limite determinado, quando n augmenta (n.º 14-1.º) indefinidamente.

A demonstração que precede só tem logar quando todas as quantidades a_1, a_2 , etc. são racionais. A conclusão porém, a que se chegou, tem ainda logar quando todas ou algumas d'estas quantidades são irracionais. Com effeito, representando por b_1, b_2 , etc. numeros racionais respectivamente inferiores a a_1, a_2 , etc. e tão proximos d'estes numeros quanto se queira, temos

$$\sum_{m=1}^n b_m < \sum_{m=1}^{\infty} a_m < \alpha,$$

e portanto

$$\prod_{m=1}^n (1 + b_m) < 2^{\sum_{m=1}^n b_m} < 2^{2\alpha}.$$

Quando b_1, b_2 , etc. tendem para a_1, a_2 , etc., e n augmenta indefinidamente, o primeiro membro d'esta desigualdade augmenta constantemente; logo tende (n.º 14-1.º) para um limite.

Reciprocamente, a desigualdade

$$\prod_{m=1}^n (1 + a_m) = 1 + \sum_{m=1}^n a_m + \dots > \sum_{m=1}^n a_m$$

mostra que, se $\sum_1^n a_m$ tende para ∞ , quando n augmenta indefinidamente, tambem o producto $\prod_1^n (1 + a_m)$ tende para ∞ .

Temos pois o seguinte:

THEOREMA. *É condição necessaria e sufficiente para que o producto (1) seja convergente que a serie Σa_m o seja.*

30. Podemos ligar com a doutrina precedente a das potencias de grau infinito. A este respeito vamos considerar a expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

H

que tem grande importancia no *Calculo Differencial*, para procurar o limite para que tende, quando n tende para o infinito. Supporemos que o numero n é inteiro e positivo, reservando para mais tarde o caso de n representar um numero qualquer.

A desigualdade

$$(1 + \beta)^p > \left(1 + \beta \frac{p}{q}\right)^q$$

ou

$$(1 + \beta)^{\gamma} > 1 + \beta\gamma$$

dá, pondo $\beta = \frac{1}{n+1}$, $\gamma = \frac{n+1}{n}$ e elevando á potencia n os seus dois membros,

$$(B) \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Logo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ augmenta indefinidamente com n .

Por outra parte, temos, pondo $a_n = \frac{1}{n}$ na desigualdade (A),

$$1 + \frac{1}{n} < 2^{\frac{2}{n}},$$

e portanto

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

A desigualdade (B) mostra que a expressão considerada augmenta indefinidamente com n , e esta ultima desigualdade mostra que não póde exceder o numero 4; logo tende para um limite determinado, quando n tende para o infinito. Este limite, que se designa habitualmente pela letra e , tem uma grande importancia na theoria dos logarithmos, como adiante se verá.

31. Consideremos agora o producto

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + u_m),$$

onde u_1, u_2 , etc. representam quantidades reaes ou imaginarias.

O theorema demonstrado na *Algebra elementar*, relativo á multiplicação de binomios, dá

$$\prod_{m=1}^n (1 + u_m) = 1 + \sum_{1}^n u_m + \dots + u_1 u_2 \dots u_n,$$

e do mesmo modo

$$\prod_{m=1}^n (1 + a_m) = 1 + \sum_1^n a_m + \dots + a_1 a_2 \dots a_n,$$

chamando a_1, a_2 , etc. os módulos de u_1, u_2 , etc.

Suppondo agora que o producto $\prod_1^\infty (1 + a_m)$ é convergente, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero n_1 , tal que (n.º 14)

$$\prod_{m=1}^{n+p} (1 + a_m) - \prod_{m=1}^n (1 + a_m) = \sum' a_j a_k \dots < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p .

Mas temos

$$\prod_{m=1}^{n+p} (1 + u_m) - \prod_{m=1}^n (1 + u_m) = \sum' u_j u_k \dots$$

e (n.º 11-I)

$$|\sum' u_j u_k \dots| \leq \sum' a_j a_k \dots$$

Logo

$$\left| \prod_{m=1}^{n+p} (1 + u_m) - \prod_{m=1}^n (1 + u_m) \right| < \delta,$$

quando $n > n_1$, e o producto $\prod_1^\infty (1 + u_m)$ é portanto (n.º 19-II) convergente.

Podemos pois enunciar o principio seguinte:

Se o producto $\prod_1^\infty (1 + a_m)$ é convergente, tambem é convergente o producto $\prod_1^\infty (1 + u_m)$.

Por exemplo, o producto

$$\prod_{m=1}^\infty \left(1 + \frac{|z|}{1.2 \dots m} \right),$$

onde $z = x + iy$, é convergente, visto ser convergente a serie (n.º 22-III)

$$\sum_{m=1}^\infty a_m = \sum_{m=1}^\infty \frac{|z|}{1.2 \dots m}.$$

Logo tambem é convergente o producto

$$\prod_{m=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{1.2 \dots m} \right).$$

I. No caso de ser convergente o producto $\prod (1 + a_m)$, o producto $\prod (1 + u_m)$ diz-se *absolutamente convergente*. N'este caso *póde mudar-se a ordem dos seus factores, sem alterar o seu valor*. Com effeito, representando por P_n o producto dos n primeiros factores do producto infinito dado, por P o valor d'este producto e por P'_s o producto dos s primeiros factores do producto infinito que resulta da mudança da ordem dos factores do primeiro, e dando a s um valor sufficientemente grande para que P'_s contenha todos os factores de P_n , temos

$$P'_s = P_n (1 + u_\alpha) (1 + u_\beta) \dots,$$

e portanto

$$|P'_s - P_n| = |P_n| |(1 + u_\alpha) (1 + u_\beta) \dots - 1| = |P_n| |\Sigma u_\alpha u_\beta \dots|,$$

$$\leq |P_n| \Sigma a_\alpha a_\beta \dots = |P_n| [(1 + a_\alpha) (1 + a_\beta) \dots - 1];$$

o que dá

$$|P'_s - P_n| \leq |P_n| [(1 + a_{n+1}) (1 + a_{n+2}) \dots - 1].$$

Mas, por ser convergente o producto $\prod_1^\infty (1 + a_m)$, o producto infinito que entra no segundo membro d'esta egualdade tende para a unidade, quando n tende para o infinito. Logo P'_s tende para P , quando s tende para o infinito.

Se o producto infinito considerado se decompozer n'outros, cujos valores sejam $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ..., basta substituir no calculo anterior P'_s por $P^{(1)} + P^{(2)} + \dots + P^{(s)}$ para ver que esta ultima quantidade tende para P , quando s tende para o infinito.

II. Dá-se o nome de *productos infinitos duplos* aos productos da fórma

$$\prod (1 + u_n^{(m)}),$$

cujos factores se formam dando em $1 + u_n^{(m)}$ a m e n uma infinidade de valores inteiros, positivos ou negativos.

Se dispozermos estes factores uns adiante dos outros segundo uma ordem tal que não dê lugar a omissão alguma, obtem-se um producto infinito simples. Se este producto for absolutamente convergente, o producto infinito duplo diz-se *absolutamente convergente*. N'este caso o valor do producto infinito simples é sempre o mesmo, qualquer que seja a ordem pela qual se disponham os factores do producto duplo, para formar o producto simples, e é este valor que representa, por definição, o valor do producto duplo considerado.

VII

Fracções continuas

32. As fracções continuas numericas são conhecidas desde os *Elementos de Algebra*, onde se viu a grande importancia que têm em muitas questões relativas aos numeros. Os principaes resultados lá achados têm logar no caso em que, na fracção continua

$$(1) \quad u = \frac{a_1}{b_1 + u_1}, \quad u_1 = \frac{a_2}{b_2 + u_2}, \quad u_2 = \frac{a_3}{b_3 + u_3}, \quad \dots,$$

a_1, a_2 , etc., b_1, b_2 , etc. representam polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de uma variavel x ⁽¹⁾.

I. Formando as reduzidas successivas, como no caso das fracções continuas numericas, acham-se os resultados:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{N_1}{D_1} = \frac{a_1}{b_1}, \\ C_2 &= \frac{N_2}{D_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ C_n &= \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}, \dots \end{aligned}$$

Se o numero das quantidades u_1, u_2 , etc. é infinito e C_n tende para um limite, quando n tende para infinito, a fracção continua diz-se *convergente*.

⁽¹⁾ Os primeiros resultados relativos á theoria das funcções continuas foram achados por Cataldi, Brounker, Wallis, Huygens, etc.; mas o principal fundador d'esta theoria foi Euler, que lhe consagrou diversas memorias, publicadas nos tomos ix e xi dos *Commentarii* e nos tomos ix e xi dos *Novi Commentarii* da Academia das Sciencias de S. Petersburgo, e um capitulo da sua *Introductio in Analysin infinitorum*. Depois occuparam-se das suas propriedades ou das suas applicações Lambert, Lagrange, Gauss, mais tarde Stern, que lhes consagrou um trabalho extenso, publicado nos tomos x e xi do *Jornal de Crelle*, e, nos ultimos tempos, Tchebicheff, Stieltjes, Padé, etc.

II. As tres reduzidas consecutivas:

$$\frac{N_{n-2}}{D_{n-2}}, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}$$

dão, por subtracção,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{a_n (N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2})}{D_{n-1} D_n},$$

$$C_{n-2} - C_{n-1} = - \frac{N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2}}{D_{n-1} D_{n-2}},$$

e portanto o numerador da differença $C_{n-1} - C_n$ é igual ao numerador da differença $C_{n-2} - C_{n-1}$, multiplicado por $-a_n$; mas as primeiras reduzidas dão

$$C_1 - C_2 = \frac{a_1 a_2}{D_1 D_2};$$

logo temos

$$C_{n-1} - C_n = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{D_{n-1} D_n},$$

e portanto

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = (-1)^n a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

III. Este resultado permite transformar a fracção continua n'uma serie. Com effeito, temos evidentemente

$$u = C_1 - (C_1 - C_2) - (C_2 - C_3) - \dots,$$

d'onde se segue

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{D_1 D_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{D_2 D_3} - \dots$$

O valor que se obtem sommando n termos d'esta serie é igual á reduzida de ordem n da fracção continua. Logo, para que a fracção continua seja convergente, é necessario e basta que esta serie o seja ⁽¹⁾.

(1) Póde ver-se outro criterio para reconhecer a convergencia das fracções continuas em um trabalho de Stern publicado no tomo xxxvii do *Jornal de Crelle*.

IV. Entre as fracções continuas contidas na fórmula geral (1) ha um grupo mais importante na *Analyse*, o qual corresponde a $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$.

A respeito d'estas fracções continuas enunciaremos os principios seguintes:

1.º A fracção algebrica $\frac{N_n}{D_n}$ é irreductivel.

Este principio é consequencia da fórmula

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = (-1)^n.$$

2.º O denominador da reduzida de ordem n é um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x , cujo grau é igual á somma dos graus de b_1, b_2, \dots, b_n .

Este principio é uma consequencia da lei de formação dos denominadores das reduzidas (n.º 32-I).

3.º Se as quantidades b_1, b_2, \dots são todas positivas, D_n tende para ∞ , quando n augmenta indefinidamente, e a serie precedentemente escripta é convergente, assim como a fracção continua considerada.

4.º Se u_n tende para um limite, quando x tende para o infinito, a differença entre o valor de u e o da reduzida C_{n-1} é da fórma

$$(2) \quad u - C_{n-1} = \frac{1}{x^k} (A + \varepsilon),$$

onde k é a somma dos graus dos polynomios D_{n-1} e D_n , A uma constante determinada e ε uma quantidade que tende para zero, quando x tende para o infinito.

Antes de demonstrar esta proposição, demonstremos o lemma seguinte:

A fracção

$$y = \frac{Ax^a + Bx^b + \dots}{Lx^l + Mx^m + \dots},$$

cujo numerador e denominador estão ordenados segundo as potencias decrescentes de x , tende para zero, se é $a < l$, tende para $\frac{A}{L}$, se é $a = l$, e tende para o infinito, se é $a > l$, quando x tende para o infinito.

Com effeito, se é $a = l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \dots}{L + Mx^{m-a} + \dots} = \frac{A}{L};$$

se é $a > l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \dots}{Lx^{l-a} + Mx^{m-a} + \dots} = \infty;$$

se é $a < l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{Ax^{a-l} + Bx^{b-l} + \dots}{L + Mx^{m-l} + \dots} = 0.$$

Posto isto, a igualdade

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - \frac{N_n}{D_n} = (-1)^n \frac{1}{D_n D_{n-1}} = (-1)^n \frac{1}{D_{n-1} (D_{n-1} b_n + D_{n-2})}$$

dá, quando se muda b_n em $b_n + u_n$,

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u = (-1)^n \frac{1}{D_{n-1} (D_{n-1} b_n + D_{n-1} u_n + D_{n-2})} = (-1)^n \frac{1}{D_{n-1} (D_n + D_{n-1} u_n)}.$$

Temos pois a igualdade

$$(u - C_{n-1}) x^k = (-1)^{n+1} \frac{x^k}{D_{n-1} (D_n + D_{n-1} u_n)},$$

da qual se deduz, dividindo os dois termos da fracção que entra no segundo membro por x^k , fazendo tender x para o infinito e attendendo a que $\frac{D_{n-1} D_n}{x^k}$ tende para um limite determinado e $\frac{D_{n-1}^2}{x^k}$ tende para zero, uma igualdade da fórma

$$\lim x^k (u - C_{n-1}) = A,$$

da qual se tira o theorema enunciado.

5.º Se $\frac{N}{D}$ representar uma fracção irreductivel, cujo numerador e denominador sejam polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de x e cujo denominador seja do grau a , e se existir um numero m , maior do que $2a$, tal que seja

$$(3) \quad u - \frac{N}{D} = \frac{1}{x^m} (B + \varepsilon'),$$

B sendo uma quantidade constante e ε' uma quantidade que tenda para zero, quando x tende para o infinito, a fracção $\frac{N}{D}$ é igual á reduzida C_{n-1} da fracção continua u , no caso de u_n tender para um limite, quando x tende para o infinito.

Sejam α_{n-1} e α_n os graus dos denominadores D_{n-1} e D_n de duas reduzidas consecutivas da fracção continua considerada, taes que $\alpha_{n-1} \leq \alpha$ e $\alpha_n > \alpha$, e ponha-se $\alpha + \alpha_{n-1} = s$.

As igualdades (2) e (3) dão

$$x^s \left(\frac{N}{D} - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} \right) = \frac{x^s}{x^k} (A + \varepsilon) - \frac{x^s}{x^m} (B + \varepsilon'),$$

e portanto, fazendo tender x para o infinito e notando que é $s < k$, $s \leq 2\alpha < m$,

$$\lim \frac{x^s (ND_{n-1} - DN_{n-1})}{DD_{n-1}} = 0.$$

Temos pois

$$ND_{n-1} - DN_{n-1} = 0,$$

porque, se esta igualdade não tivesse lugar, o grau do numerador da fracção precedente seria igual ou superior ao grau do denominador, e o limite da fracção não podia ser igual a zero, em virtude do lemma anteriormente demonstrado.

Logo

$$\frac{N}{D} = \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}},$$

que é o que se queria demonstrar.

33. A theoria das fracções continuas algebricas tem a sua principal applicação no problema que consiste em procurar, sendo dada a serie convergente

$$u = A_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c^n}{x^n} + \dots,$$

onde A_0 representa um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x , uma serie de fracções irreductiveis

$$\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \dots, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \dots$$

taes que, sendo α o grau de D_{n-1} , seja

$$u - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{1}{x^k} (A + \varepsilon),$$

representando por A uma constante, por k um numero inteiro maior do que 2α e por ε uma variavel que tende para zero, quando x tende para o infinito. Para resolver esta questão, vamos primeiramente desenvolver u em fracção continua.

I

Pondo, para isso,

$$u = A_0 + \frac{1}{v}, \quad v = \frac{1}{\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots},$$

e suppondo que c_i é o primeiro dos coefficients c_1, c_2, c_3, \dots que não é nullo, teremos, effectuando a divisão, um resultado da fórma

$$v = A_1 + u_1, \quad u_1 = \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \frac{d_3}{x^3} + \dots,$$

onde A_1 representa um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x , do grau i .

Temos depois

$$u_1 = \frac{1}{v_1}, \quad v_1 = \frac{1}{\frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \frac{d_3}{x^3} + \dots}$$

e portanto, suppondo que d_j é o primeiro dos coefficients d_1, d_2, \dots que não é nullo, e representando por A_2 um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x , do grau j ,

$$v_1 = A_2 + u_2, \quad u_2 = \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \frac{e_3}{x^3} + \dots$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se o desenvolvimento de u em fracção continua:

$$u = A_0 + \frac{1}{A_1 + u_1}, \quad u_1 = \frac{1}{A_2 + u_2}, \quad \dots, \quad u_{n-1} = \frac{1}{A_n + u_n}.$$

Como u_n tende para zero, quando x tende para o infinito, e os graus de D_{n-1} e D_n são o primeiro igual a α e o segundo maior do que α , as convergentes d'esta fracção continua satisfazem (n.º 32-4.º) á questão proposta, e são as unicas fracções (n.º 32-5.º) que lhe satisfazem.

A transformação das series em fracções continuas foi feita pela primeira vez por Euler. A que vimos de considerar tem applicações importantes em um trabalho de Gauss sobre a quadratura approximada das curvas e em alguns trabalhos de Tchebicheff, Laguerre, Stieltjes, etc.

CAPITULO II

Principios geraes da theoria das funcções. Funcções algebricas, logarithmicas, etc.

I

Principios geraes

34. *Funcções de variaveis reaes.* — Se duas quantidades reaes variaveis x e y estão ligadas de tal modo que os valores da segunda dependem dos valores da primeira, diz-se que y é *funcção de x* . Assim, por exemplo, a^x , $\text{sen } x$, x^m , etc. são funcções de x . Para designar que y é funcção de x , emprega-se qualquer das notações

$$y=f(x), y=F(x), y=\varphi(x), \text{ etc.}$$

Os valores que tomam as funcções $f(x)$, $F(x)$, etc., quando á variavel x se dá o valor determinado a , representam-se por $f(a)$, $F(a)$, etc.

Á variavel x chama-se *variavel independente* e á variavel y *variavel dependente*. A variavel independente póde representar qualquer numero de collecção geral dos numeros, ou qualquer numero de uma collecção especial, como, por exemplo, da collecção dos numeros comprehendidos entre A e B, etc. Os valores de y ficam determinados quando x é dado.

Uma funcção $f(x)$ diz-se *definida no intervallo de $x=a$ a $x=b$* , quando a todo o valor que se dá a x , desde a até b , corresponde um valor unico da funcção.

Uma funcção diz-se *definida na vizinhança do ponto $x=a$* , quando existe um numero β , tal que a funcção é definida no intervallo de $x=a-\beta$ a $x=a+\beta$.

Nas definições e enunciados dos theoremas geraes, relativos ás funcções, suporemos sempre que a cada valor de x corresponde um só valor da funcção. Para depois se applicarem estes principios ás funcções que tomam muitos valores para cada valor de x , é necessario primeira-

*

mente separar aquelles valores de modo a formar novas funcções, taes que a cada valor de x corresponda um só valor de cada uma. As novas funcções assim formadas chamam-se *ramos* da primeira.

Deve-se observar que esta separação não se faz de uma maneira arbitraria; deve ser feita de tal modo que as novas funcções tenham as qualidades geraes que iremos attribuindo ás funcções de que nos occuparmos.

35. Principiaremos o estudo geral das funcções demonstrando o theorema seguinte, devido a Weierstrass:

Se os valores da funcção $f(x)$, correspondentes aos valores que toma x desde $x=a$ até $x=\beta$, estão todos comprehendidos entre dois numeros a e b , existe sempre um numero L , tal que os valores de $f(x)$ não podem ser superiores a L e tal que, ou L representa um valor de $f(x)$, ou entre L e $L-\delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$, por mais pequeno que seja δ ; e existe sempre um numero l , tal que os valores de $f(x)$ não podem ser inferiores a l e tal que, ou l representa um valor de $f(x)$, ou entre l e $l+\delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$.

Supponhamos que é $b > a$ e dividamos o intervallo entre a e b em dois intervallos eguaes, o que dá os numeros

$$a, a + \frac{b-a}{2}, b,$$

e sejam a_1 o ultimo d'estes tres numeros que $f(x)$ chega a exceder, quando x varia desde a até β , e b_1 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder. Temos

$$a_1 = a, b_1 = a + \frac{b-a}{2} < b, b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

quando $f(x)$ não póde exceder $a + \frac{b-a}{2}$, e

$$a_1 = a + \frac{b-a}{2} > a, b_1 = b, b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

quando $f(x)$ chega a exceder $a + \frac{b-a}{2}$.

Dividamos em seguida o intervallo entre a_1 e b_1 em dois intervallos eguaes, o que dá os numeros

$$a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, b_1,$$

e sejam a_2 o ultimo d'estes numeros que $f(x)$ chega a exceder e b_2 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder. Temos

$$a_2 \overline{>} a_1, \quad b_2 \overline{<} b_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se um grupo de numeros crescentes

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots,$$

que $f(x)$ chega a exceder, e um grupo de numeros decrescentes

$$b, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_n, \quad \dots,$$

que $f(x)$ não póde exceder, taes que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Os numeros a, a_1, a_2 , etc. tendem para um numero racional ou irracional L ; e, como a differença $b_n - a_n$ tende para zero, quando n tende para o infinito, segue-se que os numeros b, b_1, b_2 , etc. tendem tambem para o limite L . Como porém $f(x)$ não póde exceder os numeros b, b_1, b_2 , etc., esta funcção não póde exceder L ; e, como, por outra parte, temos

$$L - f(x) < L - a_n < b_n - a_n,$$

ou

$$L - f(x) < \frac{b - a}{2^n},$$

ou, dando a n um valor tão grande que seja $\frac{b - a}{2^n} < \delta$,

$$L - f(x) < \delta,$$

vê-se que $f(x)$ chega a exceder $L - \delta$, quando x varia desde α até β , por mais pequeno que seja δ , o que é a primeira parte do theorema.

Do mesmo modo se demonstra a existencia de um numero l que satisfaz ás condições do theorema.

Aos numeros L e l chama-se respectivamente *limite superior* e *limite inferior* dos valores considerados da funcção.

NOTA. É facil de ver que o theorema precedente tem logar no caso mais geral de se considerar, em logar de uma funcção, um grupo qualquer de numeros comprehendidos entre a e b .

36. Seja $f(x)$ uma função definida na vizinhança do ponto a . Se $f(a+h)$ tende para $f(a)$, quando h tende para zero, e isto tem lugar qualquer que seja a serie de valores pelos quaes passa h , diz-se que a função $f(x)$ é *continua* no ponto a . Se no ponto a a função não é continua, diz-se que é *discontinua*.

D'esta definição e do que se disse no n.º 15-1.º e no n.º 16 a respeito da noção de limite decorrem immediatamente as seguintes proposições:

1.º É condição necessaria e sufficiente para que a função $f(x)$ seja continua no ponto a , que a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero positivo ε , tal que a desigualdade

$$(1) \quad |f(a+h) - f(a)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < \varepsilon$.

2.º A somma, o producto, o quociente (quando o divisor não é nullo no ponto a) e as raizes de funções de x , continuas no ponto a , são funções de x , continuas no mesmo ponto.

Com effeito, sendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ estas funções e $f(x)$ a sua somma, temos (n.º 16-1.º)

$$\lim_{h=0} f(a+h) = \lim_{h=0} \varphi(a+h) + \lim_{h=0} \psi(a+h) = \varphi(a) + \psi(a) = f(a).$$

Do mesmo modo se demonstram os theoremas relativos ao producto, ao quociente e á raiz, baseando-se nos theoremas 2.º, 3.º e 4.º do n.º 16.

3.º Se $y = \varphi(x)$ representa uma função continua de x no ponto a e $z = \psi(y)$ uma função continua de y no ponto b , correspondente a $x=a$, a função de função $z = \psi[\varphi(x)]$ é continua no ponto $x=a$.

Com effeito, quando x tende para a , y tende para b , e z tende para $\psi(b)$, e portanto para $\psi[\varphi(a)]$, visto ser $\psi(b) = \psi[\varphi(a)]$.

37. Os theoremas seguintes dão propriedades importantes das funções continuas:

THEOREMA 1.º Se a função $f(x)$ fôr continua em todos os pontos, desde $x=a$ até $x=b$, e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem signaes contrarios, entre a e b existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ (Cauchy).

Supponhamos $b > a$ e dividamos o intervallo de $x=a$ a $x=b$ em duas partes eguaes, o que dá os numeros

$$a, a + \frac{b-a}{2}, b.$$

Se o segundo numero annullar a função, está o theorema verificado. No caso contrario, representando por a_1 e b_1 dois d'estes numeros que sejam consecutivos e dêem á função

signaes contrarios, temos

$$a_1 = a, \quad b_1 = a + \frac{b-a}{2} < b, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

quando a e $a + \frac{b-a}{2}$ dão á funcção signaes contrarios, e

$$a_1 = a + \frac{b-a}{2} > a, \quad b_1 = b, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

no caso contrario.

Dividamos do mesmo modo o intervallo de $x = a_1$ a $x = b_1$ em dois intervallos eguaes, o que dá o numeros

$$a_1, \quad a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, \quad b_1,$$

e chamemos a_2 e b_2 os dois numeros consecutivos d'este grupo que dão a $f(x)$ signaes contrarios; temos

$$a_2 \geq a_1, \quad b_2 \leq b_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se um grupo

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots$$

de numeros crescentes e um grupo

$$b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_n, \quad \dots$$

de numeros decrecentes, maiores do que os numeros do grupo anterior e taes que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Os numeros do primeiro grupo tendem para um numero racional ou irracional c ; e, por ser a funcção $f(x)$ continúa no intervallo de $x = a$ a $x = b$, os numeros $f(a_1)$, $f(a_2)$, etc. devem tender para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estes numeros (n.º 13-3.º).

Os numeros b_1 , b_2 , etc. tendendo tambem para c , os numeros $f(b_1)$, $f(b_2)$, etc. tendem tambem para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estes numeros.

Mas $f(c)$ não póde ter ao mesmo tempo o signal de $f(a_n)$ e de $f(b_n)$, porque estes numeros têm signaes contrarios; logo $f(c) = 0$.

THEOREMA 2.º *Se a função $f(x)$ é contínua em todos os pontos, desde $x=a$ até $x=b$, e A e B são dois valores de $f(x)$, correspondentes aos valores a e b de x , $f(x)$ passa por todos os valores compreendidos entre A e B , quando x varia desde a até b .*

Com effeito, sendo C um valor compreendido entre A e B e portanto $A > C > B$, as quantidades $f(a) - C$ e $f(b) - C$ têm signaes contrarios; logo existe um valor x_1 de x , comprehendido entre a e b (theorem 1.º), tal que é $f(x_1) - C = 0$.

THEOREMA 3.º *Se a função $f(x)$ for contínua no intervallo de $x=a$ a $x=b$, incluindo a e b , existe um limite superior e um limite inferior dos valores que ella tem neste intervallo, e estes limites representam valores da função (Weierstrass).*

É evidente que, se $f(x)$ não tivesse limite superior no intervallo de $x=a$ a $x=b$, tambem não teria limite superior n'um pelo menos dos intervallos que resultam de dividir aquelle em duas partes iguaes; e que, se $f(x)$ tiver limite superior no intervallo considerado, este limite coincide com o limite superior correspondente a um $(a_1$ a $b_1)$ dos intervallos parciaes. Continuando depois, como na demonstração do theorem 1.º, é facil de ver que, se não existir limite superior, haverá dois grupos de numeros

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

que tenderão para o mesmo limite c , taes que não existirá limite superior dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a_n até b_n ; e que, se existir um limite superior L , este numero será tambem o limite superior dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a_n até b_n .

Mas, por ser a função $f(x)$ contínua no ponto c , a cada valor de δ corresponde um numero positivo h_1 , tal que a desigualdade

$$|f(c+h) - f(c)| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1 . Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c-h_1$ e $c+h_1$, vê-se que é

$$|f(x) - f(c)| < \delta,$$

quando x está comprehendido entre a_n e b_n , e portanto que $f(x)$ está comprehendido entre $f(c) + \delta$ e $f(c) - \delta$. Existe pois um limite superior a L (n.º 35) dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a até b .

Para mostrar que este limite é um valor de $f(x)$, basta notar que, por ser tambem L o

limite superior dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a_n até b_n , temos para alguns d'estes valores de x , por definição (n.º 35),

$$f(x) > L - \delta',$$

por mais pequeno que seja δ' , e portanto

$$f(c) + \delta > L - \delta';$$

o que dá, fazendo tender δ e δ' para zero, $f(c) = L$, visto que $f(c)$ não póde ser maior do que L .

Por um raciocinio semelhante se demonstra a parte do theorema que se refere ao limite inferior.

THEOREMA 4.º *Se a funcção $f(x)$ for continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$, incluindo a e b , a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor ε , tal que a desigualdade*

$$|f(x') - f(x)| < \delta$$

é satisfeita por todos aquelles valores de x e x' , pertencentes ao intervallo considerado, cuja differença é menor, em valor absoluto, do que ε (G. Cantor).

Com effeito, se o theorema não tivesse logar, tambem não teria logar n'um, pelo menos, dos intervallos que resultam de dividir o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes eguaes por meio dos numeros

$$a, a + \frac{b-a}{2}, b;$$

porque, se o theorema tivesse logar nos dois intervallos, teriamos, representando por x_1 e x'_1 dois valores de x pertencentes ao primeiro intervallo, por x_2 e x'_2 dois valores de x pertencentes ao segundo e por α o valor que tem x no ponto de separação dos dois intervallos,

$$\begin{aligned} |f(x'_1) - f(x_1)| &< \delta, & |f(x'_2) - f(x_2)| &< \delta, \\ |f(x_1) - f(\alpha)| &< \frac{1}{2} \delta, & |f(x_2) - f(\alpha)| &< \frac{1}{2} \delta, \end{aligned}$$

quando $|x'_1 - x_1| < \varepsilon_1$, $|x'_2 - x_2| < \varepsilon_2$, $|x_1 - \alpha| < \varepsilon_3$, $|x_2 - \alpha| < \varepsilon_4$, e, por ser

$$|f(x'_2) - f(x'_1)| \leq |f(x'_2) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x'_1)| < \delta,$$

J

as condições do theorema verificavam-se em todo o intervallo de $x=a$ a $x=b$ dando a ε o menor dos valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

Chamando a_1 e b_1 as extremidades d'aquelle dos intervallos precedentes no qual o theorema não teria logar, vê-se que o theorema também não deveria ter logar n'um pelo menos dos intervallos parciaes que resultam de dividir o intervallo $x=a_1$ a $x=b_1$ em duas partes eguaes por meio dos numeros

$$a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, b_1.$$

Continuando do mesmo modo, como na demonstração do theorema 1.º, é facil de ver que, se o theorema não fosse verdadeiro, haveria dois grupos de numeros

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

que tenderiam para o limite c , taes que o theorema não seria também verdadeiro no intervallo de $x=a_n$ a $x=b_n$.

Mas, por ser a função $f(x)$ continua no ponto c , a cada valor δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 , tal que é

$$|f(c+h)-f(c)| < \frac{1}{2} \delta,$$

quando h está comprehendido entre $-h_1$ e $+h_1$. Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c-h_1$ e $c+h_1$, a desigualdade

$$|f(x)-f(c)| < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a_n e b_n . Chamando pois x' um valor de x comprehendido entre estes numeros, temos

$$|f(x')-f(c)| < \frac{1}{2} \delta.$$

D'esta desigualdade e da anterior tira-se (n.º 11) a desigualdade

$$|f(x')-f(x)| \leq |f(x')-f(c)| + |f(x)-f(c)| < \delta,$$

que é satisfeita por todos os valores de x e de x' compreendidos entre a_n e b_n . Logo o theorema tem logar para o intervallo de $x=a_n$ a $x=b_n$, e portanto tambem tem logar para o intervallo de $x=a$ a $x=b$.

38. Se uma quantidade variavel u depende de outras variaveis x, y , etc., diz-se que u é funcção das variaveis x, y , etc. e escreve-se

$$u=f(x, y, \dots), u=F(x, y, \dots), \text{ etc.}$$

A funcção $f(x, y, \dots)$, definida na visinhança dos pontos $x=a, y=b$, etc., diz-se *continua* no ponto (a, b, c, \dots) , se $f(a+h, b+k, \dots)$ tende para $f(a, b, \dots)$, quando h, k , etc. tendem para zero, e isto tem logar qualquer que seja o modo como estas quantidades tendam para zero.

É facil de estender os theoremas que demonstrámos nos numeros anteriores para as funcções de uma variavel, ao caso das funcções de muitas variaveis. Assim temos, limitando-nos aos theoremas de que teremos de fazer uso:

1.º *É condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x, y, \dots)$ seja continua no ponto (a, b, \dots) , que a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero ϵ , tal que a desigualdade*

$$|f(a+h, b+k, \dots) - f(a, b, \dots)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h, k , etc. que satisfizerem ás condições $|h| < \epsilon, |k| < \epsilon$, etc.

2.º *A somma, o producto, o quociente [quando o divisor não é nullo no ponto (a, b, \dots)] e as raizes de funcções continuas no ponto (a, b, \dots) são funcções de x, y , etc., continuas no mesmo ponto.*

Estes dois principios são corollarios dos principios a que nos referimos no n.º 17.

3.º *Se a funcção $f(x, y)$ for continua para todos os valores de x e y representados pelos pontos de uma área limitada A (incluindo o contorno), existe um limite superior e um limite inferior dos valores que ella toma nos pontos d'essa área, e estes limites representam valores da funcção.*

Sejam a e b o menor e o maior dos valores que toma x na área considerada e a' e b' o menor e o maior dos valores que toma y na mesma área, e tracemos as duas parallelas aos eixos coordenados cujas equações são $x = \frac{1}{2}(a+b)$, $y = \frac{1}{2}(a'+b')$, as quaes dividem a área em quatro novas áreas. Se a funcção $f(x, y)$ não tiver limite superior na área A , tambem o não tem n'uma pelo menos das partes em que se dividiu esta área; e, se a funcção $f(x, y)$ tiver limite superior na área A , este limite coincide com o limite superior correspondente a uma d'estas partes de A . Seja A_1 a parte de A a que vimos de nos referir, e sejam

*

a_1, a'_1, b_1, b'_1 os menores e os maiores valores que tomam respectivamente x e y n'esta ultima área; temos

$$a_1 \overline{\overline{>}} a, b_1 \overline{\overline{<}} b, a'_1 \overline{\overline{>}} a', b'_1 \overline{\overline{<}} b', b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a), b'_1 - a'_1 = \frac{1}{2}(b' - a').$$

Dividindo do mesmo modo a área A_1 em quatro novas áreas por meio das rectas cujas equações são $x = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $y = \frac{1}{2}(a'_1 + b'_1)$, fórma-se como anteriormente uma área A_2 , tal que, se a função não tiver limite superior em A , tambem o não tem em A_2 , e, se a função tiver limite superior em A , este limite coincide com o que a função tem em A_2 ; e temos, representando por a_2, a'_2, b_2 e b'_2 os menores e os maiores valores que tomam respectivamente x e y na área A_2 ,

$$a_2 \overline{\overline{>}} a_1, a'_2 \overline{\overline{>}} a'_1, b_2 \overline{\overline{<}} b_1, b'_2 \overline{\overline{<}} b'_1, \\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}, b'_2 - a'_2 = \frac{b' - a'}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, formam-se duas series de numeros crescentes ($a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$) e ($a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$), e duas series de numeros decrescentes ($b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$) e ($b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots$), que satisfazem ás condições

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, b'_n - a'_n = \frac{b' - a'}{2^n},$$

e que portanto tendem a primeira e a terceira para um limite c e a segunda e a quarta para um limite d ; e fórma-se uma serie de áreas $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, contendo todas no interior o ponto (c, d) , taes que, se $f(x, y)$ não tiver limite superior na área A , tambem o não tem na área A_n , e, se tiver um limite superior L na área A , este numero é tambem o limite superior dos valores que toma aquella função na área A_n . N'esta área os valores de x e y estão respectivamente comprehendidos entre a_n e b_n e entre a'_n e b'_n .

Mas, por ser a função $f(x, y)$ continua no ponto (c, d) , a cada valor dado a δ corresponde um numero ϵ , tal que a desigualdade

$$|f(x, y) - f(c, d)| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de x e y respectivamente comprehendidos entre $c - \epsilon$ e $c + \epsilon$ e entre $d - \epsilon$ e $d + \epsilon$; e por isso, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - \epsilon$ e $c + \epsilon$ e a'_n e b'_n fiquem comprehendidos entre $d - \epsilon$ e $d + \epsilon$, a mesma desigualdade é satisfeita pelos valores de x e y que representam os pontos da área A_n . Logo os valores correspondentes de $f(x, y)$ estão comprehendidos entre $f(c, d) - \delta$ e $f(c, d) + \delta$, e

existe portanto (n.º 35) um limite superior L dos valores que $f(x, y)$ toma na área A_n e, por consequência, na área A .

Para demonstrar que o limite, cuja existencia vimos de mostrar, é um valor da função $f(x, y)$, notemos que, por ser também L o limite superior dos valores que toma $f(x, y)$ na área A_n temos, para alguns dos valores de x e y representados pelos pontos de A_n ,

$$f(x, y) > L - \delta',$$

por mais pequeno que seja δ' , e portanto

$$f(c, d) + \delta > L - \delta';$$

o que dá, fazendo tender δ e δ' para zero, $f(c, d) = L$, visto que $f(c, d)$ não pôde ser maior do que L .

Do mesmo modo se mostra que o limite inferior existe e é um valor da função.

4.º Se a função $f(x, y)$ fôr continua em todos os pontos (x, y) de uma área fechada A (incluindo o contorno), a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero ε , tal que a desigualdade

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \delta$$

é satisfeita por todos os grupos de valores de (x, y) e de (x', y') , representados pelos pontos da área A , que satisfazem ás condições $|x - x'| < \varepsilon$, $|y - y'| < \varepsilon$.

Divida-se, como na demonstração do theorema anterior, a área A em quatro áreas por meio das rectas $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(a' + b')$. Vê-se, como no caso das funções d'uma variavel (n.º 37-4.º), que, se o theorema não tivesse logar na área A , também não teria logar n'uma pelo menos A_1 das áreas em que se dividiu A . Continuando depois, como na demonstração do theorema anterior, podemos formar duas series de numeros $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, que tendem para um limite c , e duas series de numeros $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots)$ e $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$, que tendem para um limite d , taes que, se o theorema enunciado não fosse verdadeiro para a área A , não o seria também para a parte A_n da área A , que está comprehendida no rectangulo cujos lados têm as equações $x = a_n$, $x = b_n$, $y = a'_n$, $y = b'_n$.

Mas, por ser a função $f(x, y)$ contínua no ponto (c, d) , a cada valor de δ corresponde um numero ε , tal que é

$$|f(x, y) - f(c, d)| < \frac{1}{2}\delta,$$

quando x e y estão respectivamente comprehendidos entre $c - \varepsilon$ e $c + \varepsilon$ e entre $d - \varepsilon$ e $d + \varepsilon$. Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - \varepsilon$ e

$c + \varepsilon$ e a'_n e b'_n fiquem compreendidos entre $d - \varepsilon$ e $d + \varepsilon$, a desigualdade anterior é satisfeita por todos os valores de x e y representados pelos pontos da área A_n , o que dá, sendo x' e y' dois valores de x e y que satisfaçam a esta condição,

$$|f(x', y') - f(c, d)| < \frac{1}{2} \delta.$$

D'esta desigualdade e da anterior tira-se a desigualdade

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \delta,$$

que é satisfeita pelos valores de (x, y) e (x', y') que representam pontos da área A_n . Logo o theorema enunciado tem logar na área A_n , e portanto também tem logar na área A .

Do mesmo modo se demonstram os theoremas seguintes:

5.º Se a função $f(x, y, z)$ for continua para todos os valores de x, y e z representados pelos pontos de um volume limitado V (incluindo a superficie que o limita), a função admite um limite superior e um limite inferior dos valores que toma nos pontos d'este volume, e estes limites são valores da função.

6.º Se a função $f(x, y, z)$ for continua em todos os pontos (x, y, z) de um volume limitado V (incluindo a superficie que o limita), a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero ε , tal que a desigualdade

$$|f(x', y', z') - f(x, y, z)| < \delta$$

é satisfeita por todos os grupos de valores de (x, y, z) e (x', y', z') , representados pelos pontos do volume considerado, que satisfazem ás condições $|x - x'| < \varepsilon$, $|y - y'| < \varepsilon$, $|z - z'| < \varepsilon$.

39. Funções de variaveis imaginarias.—Se os valores de uma variavel $u = X + iY$ dependem dos valores de outra variavel $z = x + iy$, diz-se que u é função de z .

A função $f(x + iy)$ diz-se continua no ponto $a + ib$, se a função $f[a + h + i(b + k)]$ tende para $f(a + ib)$, quando h e k tendem para zero, e isto tem logar qualquer que seja o modo como h e k tendam para zero; ou, em outros termos (n.º 19), se X e Y são funções continuas de x e y .

D'esta definição decorre immediatamente que a somma, o producto e o quociente [quando $\phi(a + ib)$ é diferente de 0] de duas funções $\varphi(z)$ e $\phi(z)$, continuas no ponto $a + ib$, é uma função de z continua no mesmo ponto.

Com effeito, pondo

$$\varphi(z) = X + iY, \quad \phi(z) = X_1 + iY_1,$$

temos as relações

$$\varphi(z) + \psi(z) = X + X_1 + i(Y + Y_1),$$

$$\varphi(z)\psi(z) = XX_1 - YY_1 + i(XY_1 + YX_1),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{XX_1 + YY_1}{X_1^2 + Y_1^2} + i \frac{YX_1 - XY_1}{X_1^2 + Y_1^2},$$

das quaes se tira o theorema enunciado, visto que a parte independente de i e o coefficiente de i , que entram no segundo membro de cada uma d'estas relações, são (n.º 38-2.º) funcções continuas de x e y .

Vê-se tambem, como no n.º 36, que, se $u = \varphi(z)$ representa uma funcção continua de z no ponto α e $t = \psi(u)$ uma funcção continua de u no ponto β , correspondente a $z = \alpha$, a funcção de funcção $\psi[\varphi(z)]$ é continua no ponto $z = \alpha$.

II

Funcções algebricas

40. Seja $f(z)$ uma expressão analytica dada, dependente da variavel real ou imaginaria z . Se, para calcular o seu valor, for necessario executar sobre z sómente *operações algebricas* (isto é, addições, subtracções, multiplicações, elevações a potencia e extracções de raiz), em numero finito, a funcção diz-se *algebrica*. As funcções que não são algebricas dizem-se *transcendentes*.

Se a funcção $f(z)$ for algebrica, mas não contiver radicaes que affectem a variavel z , esta funcção diz-se *racional*; no caso contrario diz-se *irracional*.

Se a funcção $f(z)$ for racional, mas não contiver z em denominador, esta funcção diz-se *inteira*; no caso contrario diz-se *fraccionaria*.

Seja $F(z, u) = 0$ uma equação que determine u , quando z é dado. N'este caso diz-se que u é uma funcção de z dada debaixo de fórma *implicita*, ou, em termos mais breves, que u é funcção *implicita* de z . Resolvendo a equação precedente relativamente a u , quando isto for possivel, obtem-se u em funcção *explicita* de z .

Se o primeiro membro da equação precedentemente considerada representar uma funcção algebrica de u e z , isto é, se para calcular $F(u, z)$, quando u e z são dados, for necessario sómente executar sobre estas variaveis operações algebricas, em numero finito, diz-se que u

é função *algebraica implicita* de z . Demonstra-se em Algebra, como consequencia de theoria da eliminação, que, n'este caso, a equação precedente póde ser sempre reduzida á fórma

$$(1) \quad a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0,$$

onde m é um numero inteiro positivo e a_0, a_1, a_2 , etc. são polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de z .

N'este logar occupar-nos-hemos sómente das funções racionais, inteiras e fraccionarias, para recordar algumas das suas propriedades mais importantes.

41. Consideremos primeiramente as *funções inteiras*, isto é as funções da fórma

$$u = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n,$$

onde n é um numero inteiro positivo e A_0, A_1 , etc. são constantes reaes ou imaginarias.

I. Mudando z em $z+h$, temos

$$f(z+h) = A_0 (z+h)^n + A_1 (z+h)^{n-1} + \dots + A_k (z+h)^{n-k} + \dots + A_{n-1} (z+h) + A_n,$$

ou, desenvolvendo as potencias inteiras do binomio $z+h$ e ordenando o resultado segundo as potencias de h ,

$$\begin{aligned} f(z+h) &= A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n \\ &+ h [n A_0 z^{n-1} + (n-1) A_1 z^{n-2} + \dots + A_{n-1}] \\ &+ \frac{h^2}{1.2} [n(n-1) A_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 z^{n-3} + \dots] \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \frac{h^k}{1.2 \dots k} [(n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots] \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ A_0 h^n, \end{aligned}$$

pondo

$$(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1), \text{ etc.}$$

Representando os coeficientes de h , $\frac{1}{2} h^2$, $\frac{1}{2 \cdot 3} h^3$, etc. por $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc., vem a igualdade

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(z) + \dots + \frac{h^k}{1 \cdot 2 \dots k} f^{(k)}(z) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(z),$$

que tem o nome de *fórmula de Taylor*.

As funções $f'(z)$, $f''(z)$, etc. são respectivamente do grau $n-1$, $n-2$, etc., e a sua lei de formação é dada pela fórmula seguinte:

$$f^{(k)}(z) = (n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots$$

A estas funções dão-se respectivamente os nomes de *derivada de primeira ordem*, de *derivada de segunda ordem*, etc. da função $f(z)$.

Da comparação da fórmula precedente com a correspondente a $k+1$

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z) &= (n)_{k+1} A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_{k+1} A_1 z^{n-k-2} + \dots \\ &= (n)_k (n-k) A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_k (n-k-1) A_1 z^{n-k-2} + \dots \end{aligned}$$

tira-se a seguinte regra, para formar as derivadas successivas de $f(z)$:

Para passar de uma função para a sua derivada ou de uma derivada para a seguinte, multiplique-se em cada termo da primeira o expoente de z pelo coeficiente e diminua-se o expoente de uma unidade.

Por exemplo, no caso de

$$f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^2 - 7,$$

vem

$$f'(z) = 5z^4 - 12z^3 + 8z,$$

$$f''(z) = 20z^3 - 36z^2 + 8,$$

.....

II. A fórmula de Taylor mostra que $f(z+h)$ tende para $f(z)$, quando h tende para 0, e portanto que a função inteira $f(z)$ é continua, qualquer que seja z .

III. A função inteira $f(z)$ é o producto de n factores do primeiro grau:

$$(A) \quad f(z) = A_0 (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \dots (z-l)^\lambda,$$

onde a, b, \dots, l são as raízes da equação $f(z)=0$.

K

Este theorema importante é uma consequencia do principio fundamental da theoria das equações, que vamos primeiramente demonstrar:

A equação algebrica $f(z) = 0$ admite pelo menos uma raiz ⁽¹⁾.

Consideremos os valores de $z = x + iy$ representados pelos pontos da área de um circulo, cujo centro esteja na origem das coordenadas e cujo raio seja um numero R , que vamos determinar de modo que o limite inferior dos valores que toma $|f(z)|$, na área considerada, não corresponda a ponto algum da circumferencia d'este circulo. Para isso, notemos que da egualdade

$$A_0 z^n = f(z) - A_1 z^{n-1} - \dots - A_n$$

se tira, suppondo $|z| > 1$,

$$|A_0| |z|^n \leq |f(z)| + |A_1| |z|^{n-1} + \dots + |A_n| < |f(z)| + [|A_1| + \dots + |A_n|] |z|^{n-1},$$

e portanto

$$|f(z)| > |A_0| |z| - [|A_1| + \dots + |A_n|],$$

e que esta ultima desigualdade faz vêr que é $|f(z)| > |A_n|$, quando

$$|z| > \frac{|A_n| + |A_1| + \dots + |A_n|}{|A_0|}.$$

Logo, escolhendo R de tal modo que seja

$$R > 1, R > \frac{|A_n| + |A_1| + \dots + |A_n|}{|A_0|},$$

$|f(z)|$ toma nos pontos da circumferencia considerada um valor maior do que o valor $|A_n|$, que toma no centro.

Posto isto, seja $f(x + iy) = X + iY$. Por ser continua a função considerada, tambem são continuas as funções X e Y , assim como (n.º 38-2.º) a função $|f(z)|$, que é igual a $\sqrt{X^2 + Y^2}$. Logo $|f(z)|$ tem um limite inferior, na área do circulo considerado, e este limite é um valor da função (n.º 38-3.º).

Seja pois l este limite e z' o valor de z que dá $|f(z')| = l$. Vamos mostrar que é $l = 0$.

(1) Foi Gauss quem deu as primeiras demonstrações rigorosas d'este importante theorema. Depois têm sido dadas muitas outras, como se pôde vêr em uma noticia que sobre ellas publicou G. Loria no t. I da *Rivista di Matematica* (Pavia, 1900).

Se l fosse diferente de zero, pondo $z = z' + h$, $z' + h$ representando um ponto do interior do círculo considerado, e suppondo que $f^{(p)}(z')$ é a primeira das quantidades $f'(z'), f''(z'), \dots$ que não é nulla, a fórmula de Taylor daria

$$f(z' + h) = f(z') + \frac{h^p}{1.2 \dots p} f^{(p)}(z') + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(z'),$$

ou, representando por α uma quantidade real compreendida entre 0 e 1, fazendo

$$h = \beta \sqrt[p]{\alpha}, \quad \beta = \sqrt[p]{-1.2 \dots p \frac{f(z')}{f^{(p)}(z')}},$$

onde daremos o valor real ao radical que entra na expressão de h e um qualquer dos seus valores ao radical que entra na expressão de β , e eliminando h e $f^{(p)}(z')$ por meio d'estas equações,

$$f(z' + h) = f(z') (1 - \alpha) + \lambda + i\eta,$$

pondo

$$\lambda + i\eta = \frac{\beta^{p+1} \alpha^{\frac{p+1}{p}}}{1.2 \dots (p+1)} f^{(p+1)}(z') + \dots + \frac{\beta^n \alpha^{\frac{n}{p}}}{1.2 \dots n} f^{(n)}(z').$$

Mas, representando por P uma quantidade superior aos modulos dos coefficients de α na somma precedente, é

$$|\lambda + i\eta| < P \left(\alpha^{\frac{p+1}{p}} + \alpha^{\frac{p+2}{p}} + \dots + \alpha^{\frac{n}{p}} \right) < (n-p) P \alpha^{\frac{p+1}{p}}.$$

Logo teriamos

$$|f(z' + h)| < |f(z')| (1 - \alpha) + (n-p) P \alpha^{\frac{p+1}{p}}$$

ou

$$|f(z' + h)| < |f(z')| - \alpha \left[|f(z')| - (n-p) P \alpha^{\frac{1}{p}} \right],$$

ou ainda, obrigando α , que já está sujeito a estar compreendido entre 0 e 1, a satisfazer á desigualdade

$$|f(z')| - (n-p) P \alpha^{\frac{1}{p}} > 0,$$

*

dando-lhe por isso um valor assaz pequeno,

$$|f(z' + h)| < |f(z')|;$$

o que é absurdo, visto que $|f(z')|$ é o limite inferior dos valores de $|f(z)|$.

Deve pois ser $f(z') = 0$, que é o que queríamos demonstrar.

É facil de demonstrar agora a fórmula (A).

Com effeito, dividindo $f(z)$ por $z - z'$ vem um quociente q da fórma $A_0 z^{n-1} + \dots$ e um resto r independente de z , e temos a egualdade

$$f(z) = q(z - z') + r,$$

que, pondo $z = z'$, dá $f(z) = r = 0$, e portanto

$$f(z) = q(z - z').$$

Temos do mesmo modo

$$q = q'(z - z''),$$

q' representando uma funcção inteira da fórma $A_0 z^{n-2} + \dots$ e z'' uma raiz de $q = 0$; e portanto

$$f(z) = q'(z - z')(z - z'').$$

Continuando do mesmo modo, até chegar a um quociente constante, obtem-se a fórmula

$$f(z) = A_0 (z - z')(z - z'') \dots (z - z^{(n)}),$$

da qual se tira a fórmula (A), suppondo α das quantidades z', z'', \dots eguaes a a , β das mesmas quantidades eguaes a b , etc.

42. Consideremos agora as *funcções racionais fraccionarias*, isto é as funcções da fórma:

$$u = f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p}.$$

I. Suppondo $n > p$, póde effectuar-se a divisão do numerador pelo denominador e reduzir d'este modo u á fórma

$$u = F(z) + \frac{\varphi(z)}{\phi(z)},$$

onde $F(z)$, $\varphi(z)$ e $\phi(z)$ são funcções inteiras, taes que o grau de $\varphi(z)$ é menor do que o de $\phi(z)$.

Consideremos agora a fracção $\frac{\varphi(z)}{\phi(z)}$ e supponhamos que, decompondo $\phi(z)$ em factores, vem

$$\phi(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \dots (z-l)^\lambda.$$

N'este caso a fracção $\frac{\varphi(z)}{\phi(z)}$ é susceptível da decomposição seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = & \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{L_1}{z-l} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(z-l)^\lambda}, \end{aligned}$$

onde os numeradores são quantidades constantes⁽¹⁾.

Demonstra-se esta proposição importante do modo seguinte:

Pondo

$$\phi_1(z) = (z-b)^\beta \dots (z-l)^\lambda$$

e chamando $\varphi_1(z)$ o quociente e R o resto da divisão de $\varphi(z) - A_\alpha \phi_1(z)$ por $z-a$, temos

$$\varphi(z) - A_\alpha \phi_1(z) = \varphi_1(z)(z-a) + R$$

e, pondo $z=a$,

$$R = \varphi(a) - A_\alpha \phi_1(a).$$

Determinando pois A_α de modo que R seja nullo, pondo para isso

$$A_\alpha = \frac{\varphi(a)}{\phi_1(a)},$$

(1) A theoria da decomposição das funcções racionais em fracções simples foi esboçada por Leibnitz, nos volumes correspondentes a 1702 e 1703 das *Acta eruditorum* de Leipzig, e por João Bernoulli, no volume correspondente a 1702 das *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*. Euler foi quem primeiro lhe deu uma fórmula completa (*Introductio in Analysin infinitorum*, cap. 11).

vem

$$\varphi(z) = A_\alpha \phi_1(z) + \varphi_1(z)(z-a),$$

d'onde se tira, dividindo por $\phi(z)$,

$$\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} \phi_1(z)}.$$

Do mesmo modo obtemos

$$\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} \phi_1(z)} = \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(z)}{(z-a)^{\alpha-2} \phi_1(z)}.$$

Continuando do mesmo modo, acha-se finalmente a egualdade

$$\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + \frac{\varphi_\alpha(z)}{\phi_1(z)}.$$

Depois applica-se a $\frac{\varphi_\alpha(z)}{\phi_1(z)}$ o mesmo processo que se applicou a $\frac{\varphi(z)}{\phi(z)}$, e continua-se do mesmo modo até chegar á decomposição enunciada.

Pelo processo anterior determinam-se as constantes A_1, A_2 , etc., B_1, B_2 , etc.; mas, attendendo á importancia d'esta questão, vamos expor um processo mais simples para esta determinação.

Pondo na egualdade precedente $z = a + h$, vem

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^\alpha \phi_1(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{h} + \frac{\varphi_\alpha(a+h)}{\phi_1(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a+h)}{\phi_1(a+h)} = A_\alpha + A_{\alpha-1} h + \dots + A_1 h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_\alpha(a+h)}{\phi_1(a+h)}.$$

Este resultado mostra que, para achar $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \dots, A_1$, basta dividir $\varphi(a+h)$ por $\phi_1(a+h)$, tendo o cuidado de ordenar primeiro estes polynomios segundo as potencias crescentes de h . Os coefficients de $h^0, h, \dots, h^{\alpha-1}$ no quociente são as constantes pedidas.

Devemos observar que na formação do numerador e do denominador de $\frac{\varphi(a+h)}{\phi_1(a+h)}$ é escusado escrever os termos que contêm potencias de h superiores a $\alpha-1$, pois que estes termos não influem no quociente.

Do mesmo modo se determinam as outras constantes B_1, B_2, \dots ⁽¹⁾.

EXEMPLO. Decomponhamos por este processo a fracção

$$\frac{z^2 - 3z + 5}{(z-1)^4(z-2)z}.$$

Pondo n'esta fracção $z = 1 + h$, excluindo o primeiro factor do denominador e effectuando depois a divisão, vem

$$\frac{\varphi(1+h)}{\phi_1(1+h)} = \frac{3-h+h^2}{-1+h^2} = -3 + h - 4h^2 + h^3 + \dots;$$

logo teremos

$$A_4 = -3, A_3 = 1, A_2 = -4, A_1 = 1.$$

Do mesmo modo, pondo na fracção considerada $z = 2 + h$ e excluindo o segundo factor do denominador, vem a egualdade

$$\frac{\varphi(2+h)}{\phi_1(2+h)} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 5}{(1+h)^4(2+h)},$$

cujo segundo membro, aproveitando só a parte independente de h no numerador e no denominador, visto que $z-2$ entra na fracção proposta no primeiro grau, se reduz a $\frac{3}{2}$. Logo temos

$$B_1 = \frac{3}{2}.$$

Do mesmo modo se acha $C_1 = -\frac{5}{2}$.

Temos pois

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 3z + 5}{(z-1)^4(z-2)z} &= \frac{1}{z-1} - \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{3}{(z-1)^4} \\ &\quad + \frac{\frac{3}{2}}{z-2} - \frac{\frac{5}{2}}{z}. \end{aligned}$$

(1) Ha outros methodos para determinar as constantes A_1, A_2 , etc. e ha mesmo fórmulas que dão expressões analyticas d'estas constantes. Podem ver-se alguns methodos e fórmulas no nosso trabalho *Sur la décomposition des fractions rationnelles*, publicado no *Jornal de sciencias mathematicas* (t. I e II) e no t. II das nossas *Obras sobre mathematica*.

NOTA. No caso de ser $\alpha = 1$, é

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Com effeito, da egualdade

$$\phi(z) = (z - a)\phi_1(z),$$

pondo $z = a + h$ e desenvolvendo os dois membros pela fórmula de Taylor, tira-se a identidade

$$\phi(a) + h\phi'(a) + \dots = h[\phi_1(a) + h\phi_1'(a) + \dots],$$

que, devendo ter logar qualquer que seja o valor de h , dá $\phi'(a) = \phi_1(a)$; e portanto temos

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\phi_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

II. Vejamos agora se a função considerada é ou não continua.

A primeira parte $F(z)$ é continua, por ser uma função inteira. A outra parte $\frac{\varphi(z)}{\phi(z)}$ é a somma de fracções da forma $\frac{A}{(z-a)^k}$, onde k é inteiro; logo é continua (n.ºs 36 e 39) em todos os pontos, excepto nos pontos $z = a, b, c, \dots, l$.

Concluiremos pois que toda a *função racional fraccionaria é continua em qualquer ponto z , que não seja raiz do denominador. N'estes pontos a função torna-se infinita.*

III

Funções exponenciaes, logarithmicas e circulares

43. As *exponenciaes*, os *logarithmos* e as *potencias de expoente irracional* são funções transcendentales conhecidas desde os Elementos de Algebra; as *funções circulares* são conhecidas desde a Trigonometria. São as unicas transcendentales estudadas nos Elementos, e o seu estudo é muito importante, por causa da frequencia com que apparecem nas questões a que se applica a Mathematica, e porque serve de preparação para o estudo das outras transcendentales de que se occupa a Analyse mathematica. Vamos por isso aqui recordar succintamente e completar em certos pontos o que a respeito d'estas funções se ensina nos Elementos.

44. Exponencial de base e expoente real. — Viu-se nos Elementos de Algebra qual é a significação de a^x quando a representa um numero racional positivo e x um numero racional, positivo ou negativo. Viu-se tambem que n'este caso a cada valor de x corresponde um valor positivo para a^x , e, além d'este, outro valor negativo quando o denominador de x é par. Considerando só os valores positivos, a^x é uma funcção de x , que tem um unico valor para cada valor racional de x .

Vejamos agora como se define a^x quando a e x são irracionais, suppondo ainda que a é positivo.

Sejam primeiramente a um numero irracional e x um numero racional, igual a $\frac{p}{q}$. N'este caso define-se $a^{\frac{p}{q}}$ por meio da egualdade

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

cujo segundo membro tem uma significação conhecida (n.º 3-6.º e n.º 7).

Sejam, em segundo logar, a um numero positivo qualquer, x um numero irracional, ($x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$) o grupo de numeros racionais, inferiores a x , que entram na definição (n.º 2) d'este numero, e a um numero racional maior do que x . Se é $a < 1$, os valores positivos de a^{x_n} crescem constantemente, quando n augmenta, sem todavia poderem exceder o numero a^a ; logo tendem para um limite (n.º 14-1.º), unico qualquer que seja o grupo de numeros que entrem na definição de x (n.º 15-2.º), que se representa pelo symbolo a^x . Se é $a < 1$, os valores positivos de a^{x_n} decrescem, quando n augmenta, e tendem para um limite, que se representa tambem por a^x .

A funcção a^x , que vimos de definir, chama-se *exponencial*. Vamos ver algumas propriedades d'esta funcção.

I. O producto de dois valores da exponencial é dado pela fórmula

$$(1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

A demonstração que se deu d'este theorema nos Elementos de Algebra é applicavel quando x e y são numeros racionais e a é um numero positivo qualquer.

No caso de x e y representarem numeros irracionais, temos, chamando y_1, y_2 , etc. os numeros racionais que formam um dos grupos que entram na definição de y ,

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n=\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n=\infty} a^{y_n} = \lim_{n=\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y}.$$

II. Quando x cresce constantemente desde $-\infty$ até ∞ , a^x cresce constantemente desde 0 até ∞ , se é $a > 1$, e decresce constantemente desde ∞ até 0, se é $a < 1$.

Seja primeiramente $a > 1$.

L

Viu-se na Arithmetica que as potencias de expoente inteiro e as raizes dos numeros maiores do que a unidade são tambem maiores do que a unidade; logo, se h representar um numero racional positivo, é $a^h > 1$. Se h representar um numero irracional positivo e h_1, h_2 , etc. representarem os numeros, menores do que h , que entram na sua definição, temos ainda $a^h > 1$, por ser $a^h > a^{h_n} > 1$.

Em virtuda d'esta desigualdade, a fórmula (1) dá $a^{x+h} > a^x$; por onde se vê que a exponencial cresce, quando o expoente cresce.

Para demonstrar que a^x tende para ∞ , quando x tende para ∞ , basta notar que, chamando m o maior inteiro contido em x , temos

$$a^x > a^m, \quad a^m = (1 + a - 1)^m = 1 + m(a - 1) + \dots;$$

por onde se vê primeiramente que a^m tende para ∞ , quando m tende para ∞ , e depois que a^x tende para ∞ , quando x tende para ∞ .

Para demonstrar que a^x tende para 0, quando x tende para $-\infty$, basta notar que, quando x é negativo, o denominador de $\frac{1}{a^{-x}}$ tende para ∞ .

Para considerar o caso de ser $a < 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, o denominador de $\frac{1}{b^x}$ cresce desde 0 até ∞ , quando x cresce desde $-\infty$ até ∞ .

III. Quando x tende para zero, a^x tende para a unidade.

Seja primeiramente $a > 1$.

Se x é positivo, temos, pondo $x = \frac{1}{t}$ e chamando m o maior inteiro contido em t ,

$$a^x - 1 = a^{\frac{1}{t}} - 1 < a^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Mas da desigualdade

$$\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)^m = 1 + a - 1 + \left(\frac{m}{2}\right) \left(\frac{a-1}{m}\right)^2 + \dots > a$$

tira-se

$$a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m}.$$

D'esta desigualdade conclue-se que $a^{\frac{1}{m}} - 1$ tende para zero, quando m tende para o infinito; e da primeira conclue-se depois que $a^x - 1$ tende para zero, quando x tende para zero.

Quando x é negativo, ponha-se $x = -y$, o que dá a egualdade

$$a^x - 1 = -\frac{a^y - 1}{a^y},$$

da qual se tira ainda o principio enunciado, visto que, quando x tende para 0, a^x tende para 1.

Para demonstrar o theorema, no caso de ser $a < 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, $\frac{1}{b^x}$ tende para 1, quando x tende para 0.

IV. A função a^x é continua, qualquer que seja x .

É o que resulta da egualdade

$$a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1),$$

a qual, attendendo a que a^h tende para 1, quando h tende para 0, mostra que a^{x+h} tende para a^x .

45. Entre as funções exponenciaes tem principal importancia em Analyse a que tem para base um certo numero, que vamos definir.

Consideremos a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e seja n um numero inteiro.

Temos, desenvolvendo este binomio,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &< 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots, \end{aligned}$$

e portanto, sommando os termos da progressão que entra no ultimo membro d'esta desigualdade,

$$(A) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Por outra parte, a desigualdade

$$\frac{(1-a)^n - 1}{(1-a) - 1} = (1-a)^{n-1} + (1-a)^{n-2} + \dots + 1 < n,$$

que tem logar quando $a < 1$, dá

$$(1-a)^n > 1-na,$$

*

e portanto, pondo $a = \frac{1}{n^2}$,

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n},$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Esta desigualdade e a desigualdade (A) mostram que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cresce indefinidamente com n e que não pôde exceder o numero 3; logo tende para um numero determinado, que se representa pela letra e . Este resultado coincide com o que se demonstrou, por outro processo, no n.º 30.

Vamos agora mostrar que a expressão considerada tende ainda para o mesmo numero e , quando n tende para o infinito passando por uma serie qualquer de numeros racionais ou irracionais, positivos ou negativos.

Seja n positivo e sejam m e $m+1$ dois numeros inteiros, entre os quaes n está comprehendido. Teremos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

e depois

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

O primeiro e o ultimo membro d'esta desigualdade tendem para e , quando m tende para o infinito. Logo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende tambem para e .

Se n é negativo e igual a $-m$, temos ainda

$$\begin{aligned}\lim_{n=-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{m=-\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m=-\infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \\ &= \lim_{m=-\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m = \lim_{m=-\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) = e.\end{aligned}$$

Póde-se calcular o valor de e , com a approximação que se quizer, dando a n os valores 1, 2, 3, ...; adiante será dado porém outro modo de o calcular, preferível a este. Vem assim $e = 2,718281\dots$

46. *Função e^{x+iy} .* — Seja e o numero que vimos de considerar. A definição de e^z , no caso do ser $z = x + iy$, deve ser tal que se recaia na exponencial de expoente real, quando é $y = 0$, e que tenha logar o principio fundamental (1). A estas condições satisfaz e^{x+iy} , quando se define pela egualdade, devida a Euler;

$$(2) \quad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Com effeito, temos, pondo $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$,

$$\begin{aligned}e^z \cdot e^{z'} &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \cdot e^{x'} (\cos y' + i \operatorname{sen} y') \\ &= e^{x+x'} [\cos (y + y') + i \operatorname{sen} (y + y')] = e^{z+z'}.\end{aligned}$$

Adiante definiremos a^z , no caso de a representar um numero positivo differente de e .

I. Da equação de definição decorre logo uma propriedade importante da exponencial de expoente imaginario, a saber: a sua *periodicidade*. Com effeito, por ser

$$\begin{aligned}e^{z+2ki\pi} &= e^x [\cos (y + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (y + 2k\pi)] \\ &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z,\end{aligned}$$

quando k é inteiro, conclue-se que a exponencial toma o mesmo valor, cada vez que z augmenta de $2i\pi$.

Do mesmo modo se vê que a exponencial toma o mesmo valor, com signal contrario, cada vez que z augmenta de $i\pi$.

II. Do que precede resulta tambem que todo o imaginario se póde exprimir debaixo da fórmula de exponencial. Com effeito, temos, ρ sendo o modulo e θ o argumento de z ,

$$x + iy = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

III. Por ser

$$e^{h+ik} = e^h (\cos k + i \sin k)$$

e por e^h , $\cos k$, $\sin k$ tenderem respectivamente para 1, 1, 0, quando h e k tendem para 0, como se viu no n.º 44-III a respeito de e^h , e na Trigonometria a respeito de $\sin k$ e $\cos k$, vê-se que é

$$\lim_{h, k=0} e^{h+ik} = 1.$$

Temos porém

$$e^{x+h+i(y+k)} = e^{x+iy} \cdot e^{h+ik}.$$

Logo

$$\lim_{h, k=0} e^{x+h+i(y+k)} = e^{x+iy}.$$

A função exponencial e^z é pois continua, qualquer que seja z .

47. Logarithmos reaes. — Consideremos agora a função inversa da exponencial e^x , isto é, a função y ligada com x pela equação

$$x = e^y,$$

e supponhamos que x é uma variável real, positiva ou negativa.

A y chama-se *logarithmo neperiano* de x , em honra de Neper⁽¹⁾, o fundador da theoria dos logarithmos, e, para o representar, emprega-se o signal $\log x$. Também se lhe dá o nome de *logarithmo natural* e o de *logarithmo hyperbolico*.

I. A variável y é uma função definida de x , que, quando x varia desde 0 até ∞ , varia desde $-\infty$ até ∞ .

Com effeito, por ser e^y uma função continua de y , que varia desde 0 até ∞ , quando y

(1) Foi Neper, geometra inglez que viveu no seculo XVII, o principal inventor e fundador da theoria dos logarithmos, á qual consagrou duas obras, uma das quaes, intitulada *Merifici logarithmorum canonis descriptio*, foi publicada em 1614, e a outra, intitulada *Merifici logarithmorum constructio*, foi publicada em 1620. A base dos logarithmos considerados primeiramente por Neper não coincide nem com e nem com 10, mas em breve reconheceu a vantagem de adoptar como base este ultimo numero. Briggs publicou em 1624 as primeiras taboas de logarithmos de base 10, aos quaes se dá o nome de *logarithmos vulgares*. Leibnitz e João Bernoulli, principalmente este ultimo, em um trabalho intitulado *Principia calculi exponentialis*, publicado no volume correspondente a 1697 das *Acta eruditorum*, relacionaram o calculo exponencial com o logarithmico.

varia desde $-\infty$ até ∞ , se a x dermos um valor positivo a , a y deve corresponder (n.º 37-2.º) um valor b , tal que $e^b = a$, e só um, visto que a valores desiguaes de y correspondem valores desiguaes de x . Além d'isso, a $x = 0$ corresponde (n.º 44-II) $y = -\infty$, a $x = \infty$ corresponde $y = \infty$, e a $e^y > e^{y'}$ corresponde $y > y'$. De tudo isto resulta o theorema enunciado.

II. Se x e x' representarem dois numeros positivos, temos

$$\log (xx') = \log x + \log x',$$

$$\log \frac{x}{x'} = \log x - \log x',$$

$$\log x^m = m \log x.$$

As demonstrações das duas primeiras egualdades e a da terceira, quando m é um numero racional, são bem conhecidas desde os Elementos d'Algebra.

Se m é um numero irracional e $m_1, m_2, \dots, m_t, \dots$ são os numeros racionaes, inferiores a m , que entram na sua definição, temos

$$\log x^{m_t} = m_t \log x,$$

e portanto

$$x^{m_t} = e^{m_t \log x},$$

e, no limite,

$$x^m = e^{m \log x}$$

Logo

$$\log x^m = m \log x.$$

III. A função $\log x$ é continua, quando a variavel x é positiva e diferente de 0. No ponto 0 a função $\log x$ é infinita.

Esta proposição resulta da egualdade

$$\log (x+h) - \log x = \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

cujos ultimo membro tende (n.º 45) para 0, quando h tende para 0.

IV. Temos, pondo $x = a^y$ e representando por $\log_a x$ o logarithmo de x na base a ,

$$\log_a x = y, \log x = y \log a,$$

e portanto

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Passa-se pois do logarithmo neperiano de x para o logarithmo de x na base a , dividindo o logarithmo neperiano de x pelo logarithmo neperiano de a .

48. Logarithmos imaginarios.— Consideremos agora a função u determinada pela equação

$$z = e^u,$$

onde z e u representam quantidades reaes ou imaginarias.

Suppondo

$$z = x + iy = \rho (\cos \omega + i \sin \omega), u = \alpha + i\beta,$$

temos a equação

$$\rho (\cos \omega + i \sin \omega) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta),$$

que dá

$$\rho \cos \omega = e^{\alpha} \cos \beta, \rho \sin \omega = e^{\alpha} \sin \beta,$$

d'onde se tira, por serem α e β reaes,

$$e^{2\alpha} = \rho^2, \cos \omega = \cos \beta, \sin \omega = \sin \beta,$$

ou

$$\alpha = \log \rho, \beta = \omega + 2k\pi,$$

onde é $\omega < 2\pi$ e k igual a zero ou a um numero inteiro, positivo ou negativo, qualquer.

Temos pois

$$(a) \quad u = \log((z)) = \log \rho + i(\omega + 2k\pi),$$

empregando, como Cauchy, o signal $\log((N))$ para designar todos os logarithmos de N e o signal $\log N$ para designar o logarithmo real.

O valor de ρ que entra nesta egualdade é dado pela fórmula

$$\rho = + \sqrt{x^2 + y^2},$$

e o valor de ω é dado, sem ambiguidade, por duas quaesquer das fórmulas

$$\omega = \arcsen \frac{y}{\rho}, \quad \omega = \arccos \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \arctang \frac{y}{x}.$$

I. Se z for um numero real positivo, é $\omega = 0$, e vê-se pela fórmula precedente que o logarithmo de z tem um valor real, correspondente a $k = 0$, e um numero infinito de valores imaginarios, correspondentes aos outros valores de k . Em todos os outros casos o logarithmo de z tem um numero infinito de valores imaginarios, e não tem valor real.

Cada uma das expressões que se obtêm para u , dando a k um valor determinado, é um *ramo* da função $\log((z))$. Cada ramo é uma função definida de z , a qual no ponto $z = 0$ se torna infinita. Quando z é um numero real positivo, a função tem um ramo real e um numero infinito de ramos imaginarios; nos outros casos só tem ramos imaginarios.

II. A egualdade fundamental

$$\log((z)) + \log((z')) = \log((zz'))$$

tem logar para todos os valores do logarithmo, como se pôde ver pelo mesmo processo que no caso das variaveis reaes. Os logarithmos que entram nos dois membros d'esta egualdade podem todavia corresponder a valores differentes de k .

III. Cada um dos ramos da função $\log((z))$ é uma função continua de z , excepto no ponto $z = 0$.

Com effeito, temos, para cada ramo,

$$\begin{aligned} \log(z + h + il) - \log z &= \frac{1}{2} \log \frac{(x+h)^2 + (y+l)^2}{x^2 + y^2} \\ &+ i \left(\arctang \frac{y+l}{x+h} - \arctang \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Quando h e l tendem para zero, temos

$$\lim_{h, l \rightarrow 0} \log \frac{(x+h)^2 + (y+l)^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

M

e, dando a h e l valores tão pequenos que $x+h$ tenha o signal de x e $y+l$ tenha o signal de y ,

$$\begin{aligned} & \lim_{h, l=0} \left(\text{arc tang} \frac{y+l}{x+h} - \text{arc tang} \frac{y}{x} \right) \\ &= \lim_{h, l=0} \text{arc tang} \frac{lx - hy}{x(x+h) + y(y+l)} = 0, \end{aligned}$$

visto que os dois arcos que entram no primeiro membro d'esta fórmula estão comprehendidos no mesmo quadrante.

Temos pois

$$\lim_{h, l=0} \log(z+h+il) = \log z,$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

49. *Função x^a .* — Sejam x a a quantidades reaes e seja além d'isso x positiva. Se a é igual a um numero racional $\frac{m}{n}$, a função x^a é algebrica; se a é irracional, a função x^a é transcendente. Em ambos os casos temos a egualdade

$$x^a = e^{a \log x},$$

da qual se deduzem as seguintes propriedades do ramo d'esta função correspondente aos valores reaes de $\log x$:

I. Quando x cresce desde 0 até ∞ , x^a cresce desde 0 até ∞ , se é $a > 0$, e decresce desde ∞ até 0, se é $a < 0$.

Com effeito, quando x cresce desde 0 até ∞ , $\log x$ cresce desde $-\infty$ até ∞ , e portanto $e^{a \log x}$ cresce desde 0 até ∞ , quando é $a > 0$, e decresce desde ∞ até 0, quando é $a < 0$.

II. O producto de dois valores da função é dado pela fórmula

$$x^a \cdot x'^a = (xx')^a.$$

Temos, com effeito,

$$x^a \cdot x'^a = e^{a \log x} \cdot e^{a \log x'} = e^{a \log (xx')} = (xx')^a.$$

III. A função x^a é continua em qualquer dos pontos considerados, exceptuando o ponto $x=0$ quando a é negativo. N'este ponto a função torna-se infinita.

Viu-se, com effeito, no n.º 47 que, quando é $x > 0$, a função $\log x$ é continua; portanto também é continua (n.º 36-3.º) a função de função $e^{a \log x}$.

No ponto $x=0$ a função x^a é infinita, quando a negativa; quando porém a é positivo, $e^{a \log x}$ tende para 0, quando x tende para 0, e a função x^a é ainda continua.

50. Função z^a . — Estudemos agora a função z^a , onde z e a representam quantidades quaesquer, reaes ou imaginarias, e consideremos tanto os valores reaes como os valores imaginarios da função.

É conhecida desde o n.º 11-IV a significação de z^a , quando a representa um numero racional qualquer, e sabe-se que é

$$z^a = \rho^a [\cos a(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} a(\theta + 2k\pi)],$$

ρ e θ representando o módulo e o argumento de z e k um inteiro qualquer, positivo ou negativo. No caso de a ser irracional toma-se esta igualdade para definição de z^a . A função z^a goza das propriedades seguintes:

I. Se a é racional e igual a $\frac{m}{n}$, a função z^a tem n ramos (n.º 11-IV), que correspondem a $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. Se a é irracional, a função tem um numero infinito de ramos. Se z é real e igual ao numero positivo x , é $\theta=0$; e z^a tem *um ramo real positivo*, correspondente a $k=0$, que foi estudado no numero anterior, e, no caso de a ser uma fracção irreductivel $\frac{m}{n}$ de denominador par, tem ainda *um ramo real negativo*, correspondente a $k = \frac{n}{2}$.

II. Por ser (n.ºs 46 e 48)

$$\begin{aligned} e^{a \log (z)} &= e^a [\log \rho + (\theta + 2k\pi) i] \\ &= \rho^a [\cos a(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} a(\theta + 2k\pi)], \end{aligned}$$

temos a relação

$$z^a = e^{a \log (z)},$$

que póde servir para definir z^a , quando a é imaginario.

III. Das egualdades

$$z^a = e^{a \log (z)}, \quad z'^a = e^{a \log (z')}$$

tira-se a seguinte:

$$z^a \cdot z'^a = (zz')^a.$$

*

Os valores das potencias, que entram nos dois membros d'esta egualdade, podem corresponder a valores differentes de k .

IV. Vê-se, como no caso das variaveis reaes, que cada ramo da função z^a é uma função continua de z , exceptuando o ponto $z=0$ quando a parte real de a é negativa.

51. *Função a^z .* — A função exponencial a^z foi já estudada no caso de a ser positivo e z real e no caso de ser $a=e$ e z imaginario. No caso geral temos ⁽¹⁾

$$a^z = e^{z \log a},$$

$\log a$ representando o ramo de $\log(a)$ correspondente a um valor particular qualquer, dado a k ; e esta egualdade faz ver que é

$$a^z \cdot a^{z'} = a^{z+z'},$$

e que a função considerada é continua.

52. *Funções circulares.* — As funções circulares $\sin x$ e $\cos x$ foram estudadas na Trigonometria, onde apparecem como auxiliares para a resolução dos triangulos ⁽²⁾.

I. As suas propriedades fundamentaes são, no caso dos arcos reaes, as seguintes:

1.^a Sendo a e b dois arcos reaes, temos

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

É o *theorem de addição* das funções $\sin x$ e $\cos x$.

2.^a As funções $\sin x$ e $\cos x$ são *periodicas*, isto é, tomam o mesmo valor cada vez que o arco augmenta de 2π . Quando o arco augmenta de π , tomam o mesmo valor absoluto, mas mudam de signal

3.^a Entre as funções $\sin x$ e $\cos x$ existe a relação

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(1) Sobre o caso em que $a=1$, o qual tem algum interesse, póde ver-se um artigo publicado no tom. II das nossas *Obras sobre Mathematica*.

(2) A theoria das razões trigonometricas foi a principio um capitulo da *Geometria elementar*. Foram João Bernoulli e Euler os fundadores da theoria analytica d'estas quantidades, por meio da qual se reduziu o calculo trigonometrico ao calculo logarithmico e exponencial.

II. As fórmulas do n.º 46:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

dão as expressões seguintes das funcções seno e coseno:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

por meio dos quaes Euler reduziu o calculo trigonometrico ao calculo exponencial.

III. Estas relações levam a introduzir na Analyse os *senos* e *cosenos* de arcos imaginarios. Representam-se, com effeito, pelas notações $\sin(x + iy)$ e $\cos(x + iy)$ as funcções que resultam de substituir nas fórmulas precedentes x por $x + iy$, a saber:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2},$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}.$$

A primeira d'estas fórmulas dá

$$\begin{aligned} \cos(z + z') &= \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{e^{iz} e^{iz'} + e^{-iz} e^{-iz'}}{2} \\ &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{-iz'} - e^{-iz'})}{4} \end{aligned}$$

ou

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'.$$

Do mesmo modo a segunda dá

$$\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z'.$$

Vê-se pois que os *senos* e os *cosenos* de arcos imaginarios gozam da propriedade expressa pelo *theorem de addição*.

Das fórmulas que servem de definição a $\sin z$ e $\cos z$ tira-se tambem facilmente a egualdade

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

IV. Seja k um numero inteiro positivo. Desenvolvendo a potencia de grau k dos binomios que entram nos primeiros membros das equaldades

$$(\cos z + i \sin z)^k = (e^{iz})^k = e^{ikz} = \cos kz + i \sin kz,$$

$$(\cos z - i \sin z)^k = \cos kz - i \sin kz,$$

e sommando e subtraindo as equaldades resultantes, membro a membro, obtêm se as fórmulas seguintes, dadas por João Bernoulli em 1701 nas *Acta eruditorum*:

$$\sin kz = k \cos^{k-1} z \sin z - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \cos^{k-3} z \sin^3 z$$

$$+ \frac{k(k-1)\dots(k-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{k-5} z \sin^5 z - \dots,$$

$$\cos kz = \cos^k z - \frac{k(k-1)}{1.2} \cos^{k-2} z \sin^2 z$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4} \cos^{k-4} z \sin^4 z - \dots$$

V. Pondo $x=0$ nas expressões de $\sin z$ e $\cos z$, vem

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad \sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}.$$

As funcções $-i \sin(iy)$ e $\cos(iy)$ têm o nome de *seno hyperbolico* e de *coseno hyperbolico* de y .

VI. Por ser a exponencial uma funcção continua, qualquer que seja z , e por serem $\sin z$ e $\cos z$ sommas d'exponenciaes, podemos enunciar o theorema seguinte:

As funcções $\sin z$ e $\cos z$ são continuas, qualquer que seja z .

VII. A funcção $\sin z$ é nulla nos pontos que satisfazem á equação

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0,$$

ou

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x) = 0,$$

ou

$$\cos x(e^{-y} - e^y) + i \sin x(e^{-y} + e^y) = 0,$$

que, por ser a expressão $e^{-x} + e^x$ sempre positiva, dá $\sin x = 0$, $e^{-x} = e^x$, e portanto $y = 0$, $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

Vê-se pois que a *função* $\sin z$ só é *nulla* nas *pontos* $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

Do mesmo modo se vê que a *função* $\cos z$ só é *nulla* nos *pontos* $z = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots$

VIII. A tangente de z , a cotangente de z , etc. são, quer z seja real quer seja imaginario, definidas pelas relações

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{cotang} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ etc.},$$

e vê-se que a primeira é continua, excepto nos pontos que satisfazem á condição $\cos z = 0$, que a segunda é continua, excepto nos pontos que satisfazem á condição $\sin z = 0$, etc.

53. *Funções circulares inversas.* — Suppondo que na relação

$$\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = \cos u = z$$

se conhece $\cos u$, isto é, z , podemos achar u , isto é, $\arccos z$.

A equação precedente dá, com effeito,

$$e^{2iu} - 2ze^{iu} + 1 = 0;$$

logo será

$$e^{iu} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

d'onde se deduz

$$u = \arccos z = \frac{1}{i} \log((z \pm \sqrt{z^2 - 1})),$$

onde se deve substituir o logarithmo neperiano pela sua expressão achado no n.º 48.

Esta fórmula dá todos os valores do $\arccos z$ e mostra que esta função tem um numero infinito de ramos (n.º 48).

Baseando-se em que toda a função de outra função continua é também continua e em que não existe valor algum de z que annulle $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, vê-se que os ramos da função $\arccos z$ são funções continuas de z , qualquer que seja z .

Do mesmo modo se acham as fórmulas

$$\operatorname{arc\,sen} z = \frac{1}{i} \log ((iz \pm \sqrt{1-z^2})),$$

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i} \log \left(\left(\frac{i-z}{i+z} \right) \right).$$

Cada uma das funções precedentes tem um numero infinito de ramos. Os ramos da primeira são funções continuas de z , qualquer que seja z ; os da segunda são funções continuas de z , excepto nos pontos i e $-i$ onde se tornam infinitos.

A descoberta da ultima fórmula, feita por João Bernoulli, foi o primeiro passo para a redução do calculo trigonometrico ao calculo logarithmico e exponencial.

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

Noções preliminares

I

Noção de infinitamente pequeno e de derivada

54. Chama-se *quantidade infinitamente pequena* toda a quantidade variavel que tende para o limite zero.

Sejam α uma quantidade infinitamente pequena e β uma quantidade ligada com α de tal modo que, quando α tende para o limite zero, β tenda tambem para este limite. Se, n'este caso, $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende tambem para zero, diz-se que β é *infinitamente pequeno de ordem superior a n relativamente a α* . Se porém $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende para um limite determinado A , differente de zero, diz-se que β é *infinitamente pequeno de ordem n relativamente a α* . N'este ultimo caso podemos escrever

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = A + \epsilon,$$

onde a quantidade ϵ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que α .

D'esta definição resultam immediatamente as consequencias seguintes:

1.º Se duas quantidades infinitamente pequenas β e β' forem respectivamente da ordem n e m relativamente a α , o seu producto será da ordem $n+m$ e o seu quociente da ordem $n-m$.

N

Com effeito, das equações de definição

$$\beta = \alpha^n (A + \epsilon), \quad \beta' = \alpha^m (B + \epsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta\beta'}{\alpha^{n+m}} = AB, \quad \lim \frac{\beta}{\beta' \alpha^{n-m}} = \frac{A}{B}.$$

2.º *Se uma quantidade infinitamente pequena β' for da ordem m relativamente a β , e esta da ordem n relativamente a α , a primeira será da ordem $n \times m$ relativamente a α .*

Com effeito, das equações de definição

$$\beta' = \beta^m (A + \epsilon), \quad \beta = \alpha^n (B + \epsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha^{nm}} = AB^m.$$

EXEMPLO 1.º — Quando um arco é infinitamente pequeno, o seu seno é um infinitamente pequeno de primeira ordem relativamente ao arco. Com effeito, sabe-se pela Trigonometria que $\frac{\text{sen } x}{x}$ tende para a unidade, quando x tende para o limite zero.

EXEMPLO 2.º — No triangulo rectangulo ABC a differença entre a hypotenusa BC e o catheto AC é infinitamente pequena de segunda ordem relativamente ao angulo BCA.

Com effeito, chamando α o angulo BCA, temos

$$CB - AC = CB(1 - \cos \alpha) = 2CB \text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

e portanto, fazendo tender α para zero,

$$\lim \frac{CB - AC}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \lim \frac{CB \text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}{\left(\frac{1}{2} \alpha\right)^2} = \frac{1}{2} CB.$$

Deu-se no n.º 36 a definição de *continuidade* das funcções. A este respeito observaremos aqui que, empregando a linguagem infinitesimal, se póde dizer que $f(x)$ é uma *funcção continua* de x , no ponto a , quando a differença $f(a+h) - f(a)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h .

55. Seja $f(x)$ uma funcção da variavel real x , definida na visinhança de cada ponto. Se,

quando h tende para zero, a fracção

$$(1) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tende para um limite *determinado* $f'(x)$, qualquer que seja a serie dos valores successivos pelos quaes passa h , quando tende para zero, a este limite dá-se o nome de *derivada* da funcção $f(x)$ no ponto x .

Se em alguns pontos a fracção (1) tende para o infinito, diz-se que a derivada é *infinita* n'estes pontos e *finita* nos outros.

Se em alguns pontos a mesma fracção não tende para um limite determinado, a funcção n'estes pontos não tem derivada. No que segue, quando dissermos que uma funcção tem derivada sem especificar os pontos em que isto tem logar, deve entender-se que a funcção tem derivada em todos os pontos em que é determinada.

É facil de ver que, no caso de $f(x)$ ser uma funcção algebrica inteira, a definição de derivada que vimos de dar, concorda com a definição dada na *Introducção* (n.º 41-I).

Com effeito, a fórmula de Taylor dá n'este caso

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x),$$

e portanto

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Da definição de derivada deduz-se immediatamente o seguinte principio:

Toda a funcção que tem derivada, é continua nos pontos em que a derivada não é infinita.

Com effeito, da egualdade

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

deduz-se

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

representando por ε uma quantidade infinitamente pequena com h .

Temos pois a egualdade

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \varepsilon],$$

a qual mostra que a differença $f(x+h) - f(x)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h , quando a funcção $f'(x)$ é finita.

*

Por muito tempo se julgou que toda a função continua em um intervalo dado tinha nos pontos d'este intervalo, exceptuando um numero limitado d'elles, uma derivada finita. Hoje sabe-se que isto é falso e conhecem-se muitas funcções, continuas em todos os pontos de um intervalo, que não admitem derivada em ponto algum d'este intervalo. Adiante será dado um exemplo notavel d'estas funcções singulares. As funcções consideradas na *Introdução* têm todas derivada. Veremos isso adiante, assim como veremos que o ramo da *Analyse* que vamos estudar, dá origem a um numero infinito de novas funcções que satisfazem á mesma condição.

56. Considerámos no paragrapho anterior a derivada como limite da razão das quantidades infinitamente pequenas $f(x+h) - f(x)$ e h . Introduzindo a noção de *differencial*, póde exprimir-se a derivada pela razão de dois infinitamente pequenos, como vamos ver.

Temos

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \varepsilon],$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h . A differença $f(x+h) - f(x)$ compõe-se pois de duas parcellas infinitamente pequenas, a primeira proporcional a h e a segunda infinitamente pequena relativamente á primeira. A parcella proporcional a h chama-se *differencial da função* $f(x)$ e representa-se por $df(x)$ ou por dy [pondo $y = f(x)$]. Para conformidade de notação, representa-se por dx o infinitamente pequeno arbitrario h . Temos pois

$$dy = f'(x) dx,$$

onde dx é o *augmento arbitrario da variavel independente* x e dy é a *parte proporcional a dx do augmento correspondente da função* $f(x)$. A derivada $f'(x)$ é o *quociente de dy por dx* .

Das duas egualdades precedentes tira-se a relação

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{dy} = 1$$

entre o augmento da função $f(x)$ e a sua differencial.

57. Em todo este livro empregaremos, para representar as derivadas, umas vezes a notação y' ou $f'(x)$ (notação de Lagrange), outras vezes a notação $\frac{dy}{dx}$ (notação de Leibnitz).

A função $f'(x)$ póde ter tambem uma derivada, que se representa por $f''(x)$, etc. Estas derivadas $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. têm respectivamente os nomes de derivada de *segunda ordem*, de *terceira ordem*, etc. da função $f(x)$. Podem tambem ser representadas pelas notações $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., por motivo que adiante veremos.

Foi por considerações geometricas que se chegou á noção importante de derivada. Vamos por isso entrar por um pouco no campo da Geometria, para se poder ver a origem d'esta noção e apreciar assim a sua importancia.

II

Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do calculo infinitesimal

58. Dá-se, como se sabe, o nome de *methodo dos limites* ao modo de determinar quantidades, considerando-as como limites d'outras quantidades conhecidas. Viu-se já na *Geometria Elementar* a importancia consideravel d'este methodo, por meio do qual se resolveram certas questões relativas ao circulo, ao cylindro, ao cône e á esphera. Aqui vamos fazer ainda duas applicações, importantes para o nosso fim.

I. Consideremos uma recta MM' , que corte uma curva em dois pontos, e supponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para o limite M ⁽¹⁾, a recta tende para um limite MT' , e que este limite é unico, qualquer que seja a serie de pontos pelos quaes passe M' , quando se aproxima de M . A esta recta MT' chama-se *tangente* á curva no ponto M .

Se forem $y=f(x)$ a equação da curva, referida a eixos rectangulares, (x, y) e $(x+h, y+k)$ as coordenadas dos pontos M e M' , θ e α as inclinações $T'ML$ e $M'ML$ da tangente e da secante sobre o eixo das abscissas, a resolução do triangulo rectangulo LMM' dará a egualdade

$$\text{tang } \alpha = \frac{M'L}{ML} = \frac{k}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

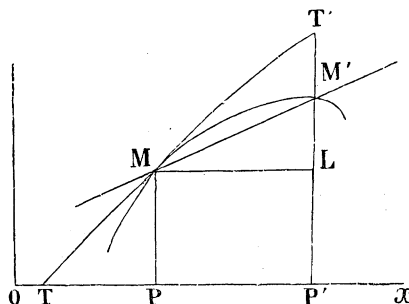
por meio da qual se determina a inclinação da secante sobre o eixo das abscissas, substituindo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva.

Mas, quando o ponto M' tende para M , h tende para zero; logo temos a egualdade

$$\text{tang } \theta = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

⁽¹⁾ Diz-se que uma recta fixa é o limite para que tende uma recta variavel, se o angulo das duas rectas tende para zero; e que um ponto fixo é o limite para que tende um ponto variavel, se a distancia dos dois pontos tende para zero.

por meio da qual se determina a direcção θ da tangente, substituindo $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva.



No caso, por exemplo, de ser $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = R^2$, teremos, mudando x em $x+h$ e y em $y+k$,

$$x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 = R^2,$$

ou

$$(2y+k)k + (2x+h)h = 0,$$

e portanto

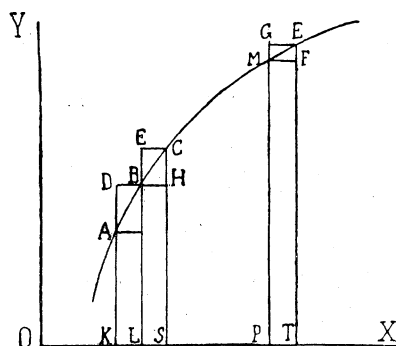
$$\text{tang } \theta = \lim \frac{k}{h} = -\lim \frac{2x+h}{2y+k} = -\frac{x}{y}.$$

Temos assim o coeſiciente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y) .

Foi Descartes quem primeiro considerou as tangentes como limite das posições das secantes, e foi tambem este grande geometra quem deu pela primeira vez um methodo geral para as achar, o qual foi publicado em 1637 na sua celebre *Geometria*. Outros methodos foram depois empregados, para resolver a mesma questão, por Fermat, Roberval, Sluse, etc. O *methodo de tangentes* que vimos de expôr, é o de Fermat, com a fórmula simples que lhe deu Barrow nas suas *Lectiões geometricae*, publicadas em 1679.

II. O segmento plano AMPK, comprehendido entre uma curva AM, cuja equação é $y=f(x)$, $f(x)$ representando uma funcção continua, o eixo das abscissas e duas ordenadas AK e MP, correspondentes ás abscissas x_0 e X, póde ser decomposto n'outros por meio de

rectas parallelas ao eixo das ordenadas, que passem por $n-1$ pontos, comprehendidos entre K e P, cujas abscissas representaremos por x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .



O segmento ABLK está comprehendido entre dois rectangulos cuja base é KL, cujas alturas são eguaes a AK e DK, e cujas áreas são portanto eguaes a $h_1 f(x_0)$ e $h_1 f(x_1)$, h_1 representando o comprimento de KL; o segmento BCSL está comprehendido entre os rectangulos BHSL e ECSL, cujas áreas são eguaes a $h_2 f(x_1)$ e $h_2 f(x_2)$, h_2 representando o comprimento de LS; etc. Logo o segmento considerado AMPK está comprehendido entre dois segmentos planos, cujas áreas são eguaes a

$$(A) \quad h_1 f(x_0) + h_2 f(x_1) + \dots + h_n f(x_{n-1})$$

e

$$(B) \quad h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \dots + h_n f(X).$$

Posto isto, chama-se *área* do segmento considerado o limite para que tendem estas sommas, quando as quantidades $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ tendem todas para zero. Admittimos por agora, como postulado, que as sommas precedentes tendem para um limite commum, e que este limite tem um valor unico, qualquer que seja o modo como se façam as divisões successivas de KP em partes cada vez menores (questão de que adiante nos occuparemos).

A consideração das áreas planas como limites de sommas de outras áreas infinitamente pequenas, que podem ser rectangulares, como precedentemente se suppoz, ou ter outras fórmas, está contida implicitamente na demonstração por *exhaustão*, dada por Archimedes, o maior geometra da antiguidade, da expressão da área da espiral conhecida pelo seu nome. No seculo xvii foi este modo de considerar as referidas áreas explicitamente empregado, com o nome de *methodo dos indivisiveis*, por alguns dos mais eminentes geometras d'esse tempo, como Cavalieri e Torricelli, na Italia, Huygens, na Hollanda, Pascal, Fermat e Roberval, na França, Wallis, na Inglaterra, G. de Saint-Vincent e Sluse, na Belgica, etc., os quaes obtiveram assim o valor das áreas limitadas por algumas curvas importantes.

EXEMPLO 1.º — Se a curva dada for a parabola de ordem m , cuja equação é $y = ax^m$, m

presentando um numero inteiro positivo, e se quizermos achar a área do segmento plano limitado por esta curva, pelo eixo das abscissas e pela ordenada correspondente á abscissa X , temos, dando a h_1, h_2, \dots, h_n um mesmo valor h , e portanto a x_0, x_1, x_2, \dots, X os valores $x_0=0, x_1=h, x_2=2h, \dots, X=nh$, e considerando-se S como limite da somma (B),

$$S = \lim_{h=0} ah^{m+1} (1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m),$$

$$= aX^{m+1} \lim \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}};$$

mas, em virtude de um theorema d'Algebra, do qual se dará adiante uma demonstração, temos

$$\lim \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1};$$

logo

$$S = a \frac{X^{m+1}}{m+1}.$$

Este resultado foi descoberto por Cavalieri, e depois por Fermat e Wallis. O caso particular de ser $m=2$ tinha sido considerado na antiguidade por Archimedes.

Se a curva dada for representada pela equação

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m,$$

acha-se do mesmo modo, suppondo que a ordenada y é positiva no intervallo de $x=0$ a $x=X$,

$$S = a_0 X + a_1 \frac{X^2}{2} + \dots + a_m \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

Este resultado suggeriu a Wallis a ideia de empregar as series para o calculo approximado das áreas planas, representando primeiramente as ordenadas da curva por uma serie ordenada segundo as potencias das abscissas, e levou assim Newton e outros geometras da mesma epocha a procurarem, como já dissemos, a representação por series das principaes funcções conhecidas n'esse tempo.

Obtem-se, como é facil de ver, o mesmo resultado, considerando S como limite da somma (A).

EXEMPLO 2.º — Consideremos agora a hyperbole cuja equação é $xy = a^2$, e procuremos o valor da área S , limitada por esta curva, pelo eixo das abscissas e por duas parallelas ao eixo das ordenadas, tiradas pelos pontos cujas abscissas são eguaes a x_0 e X .

Pondo, como Fermat,

$$x_1 = x_0 (1 + \varepsilon), x_2 = x_0 (1 + \varepsilon)^2, \dots, x_{n-1} = x_0 (1 + \varepsilon)^{n-1},$$

ε sendo uma quantidade tal que

$$(C) \quad x_0 (1 + \varepsilon)^n = X,$$

o que dá

$$h_1 = \varepsilon x_0, h_2 = (1 + \varepsilon) \varepsilon x_0, \dots, h_n = (1 + \varepsilon)^{n-1} \varepsilon x_0,$$

e, considerando S como limite da somma (A), temos

$$S = a^2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \varepsilon.$$

Póde-se ver agora, ou por meio da theoria arithmetica dos logarithmos, como os geometras que primeiro estudaram esta questão, ou por meio da sua theoria algebrica, que vamos empregar, que S é exprimivel por um logarithmo.

Com effeito, a equação (C) mostra que ε tende para 0, quando n tende para ∞ , e dá

$$n = \frac{\log X - \log x_0}{\log (1 + \varepsilon)};$$

portanto temos, pondo $\varepsilon = \frac{1}{m}$,

$$S = a^2 \log \frac{X}{x_0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\log (1 + \varepsilon)} = a^2 \log \frac{X}{x_0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m},$$

ou, tomando para base dos logarithmos considerados o numero e , definido no n.º 45,

$$S = a^2 \log \frac{X}{x_0}.$$

Este resultado explica o motivo porque a determinação da área da hyperbole levou a considerar os logarithmos de base e , e o motivo porque a estes logarithmos se deu a designação de *hyperbolicos* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Foi G. de Saint-Vincent quem primeiro se occupou da determinação da área da hyperbole e foram os resultados a que chegou, que levaram diversos geometras a descobrir a expressão d'esta área por logarithmos.

III. Representemos por S e δ as áreas de AKPM e MPTE e por X e h os segmentos OP e PT. A área δ está evidentemente comprehendida entre as áreas dos rectangulos MPTE e GPTE, e temos portanto a desigualdade

$$hf(X) < \delta < hf(X+h),$$

que, por tender $f(X+h)$ para $f(X)$, quando h tende para 0, dá

$$\lim \frac{\delta}{h} = f(X),$$

ou, por ser δ o augmento da área S correspondente ao augmento h de X ,

$$\frac{dS}{dX} = f(X).$$

Esta expressão da derivada da área S relativamente a X foi descoberta por Newton e Leibnitz.

59. O methodo dos limites, quando se determinam as quantidades considerando-as como limites de razões ou limites de sommas de quantidades infinitamente pequenas, toma o nome de methodo infinitesimal. Os dois principios seguintes facilitam a applicação do methodo infinitesimal a muitas questões:

1.º *Se se quizer achar o limite para que tende a razão $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de duas quantidades infinitamente pequenas α' e α , e se as quantidades infinitamente pequenas β' e β estiverem ligadas com α' e α de modo que seja*

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

podemos substituir α' por β' e α por β , e temos

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

Com effeito, temos por hypothese

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \epsilon', \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \epsilon,$$

onde ϵ' e ϵ são quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que α' e α . Logo será

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta' (1 + \epsilon')}{\beta (1 + \epsilon)},$$

e portanto

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

2.º Se as quantidades $\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n)}$ tenderem para zero, quando n tende para o infinito, e se quizer achar o limite para que tende n'este caso a somma d'estas quantidades, e se as quantidades positivas $\beta, \beta', \dots, \beta^{(n)}$ estiverem ligadas com $\alpha, \alpha', \alpha'', \text{ etc.}$ de tal modo que seja

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha}{\beta} = 1, \lim_{n=\infty} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \lim_{n=\infty} \frac{\alpha''}{\beta''} = 1, \text{ etc.},$$

podemos substituir α por β , α' por β' , etc., e vem

$$\lim (\alpha + \alpha' + \dots + \alpha^{(n)}) = \lim (\beta + \beta' + \dots + \beta^{(n)}).$$

Com effeito, temos

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \epsilon, \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \epsilon', \frac{\alpha''}{\beta''} = 1 + \epsilon'', \text{ etc.},$$

e portanto

$$\alpha + \alpha' + \dots + \alpha^{(n)} = \beta + \beta' + \dots + \beta^{(n)} + \beta\epsilon + \beta'\epsilon' + \dots + \beta^{(n)}\epsilon^{(n)}.$$

Mas, suppondo que ϵ é aquella das quantidades infinitamente pequenas $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \text{ etc.}$ que tem maior valor absoluto, temos (n.º 11-I) a desigualdade

$$|\beta\epsilon + \beta'\epsilon' + \dots + \beta^{(n)}\epsilon^{(n)}| < |\epsilon| (\beta + \beta' + \dots + \beta^{(n)}),$$

que, quando $\beta + \beta' + \dots$ tende para um limite determinado e ϵ tende para zero, dá

$$\lim (\beta\epsilon + \beta'\epsilon' + \dots + \beta^{(n)}\epsilon^{(n)}) = 0.$$

Logo é

$$\lim (\alpha + \alpha' + \dots) = \lim (\beta + \beta' + \dots).$$

O primeiro dos principios precedentes tem applicação nas questões da natureza do problema I do paragrapho precedente, em que uma quantidade é determinada pelo limite da razão de dois

*

infinitamente pequenos. O segundo tem applicação nas questões da natureza do problema II do mesmo paragrapho, em que uma quantidade é determinada pelo limite de uma somma de infinitamente pequenos. Em virtude d'estes principios podemos substituir os infinitamente pequenos que entrem n'uma questão, por outros que a simplifiquem.

60. Para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza do problema I do n.º 58, é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite para que tende $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, quando h tende para 0. Somos assim levados pela questão importante da determinação das tangentes ás curvas a considerar *o problema de calculo que tem por fim achar as derivadas das funcções*. Este problema é o objecto do *Calculo differencial*.

Em segundo logar, para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza do problema II do n.º 58, é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite para que tendem as sommas (A) ou (B), quando h_1, h_2, \dots, h_n tendem para zero. Somos assim levados a outro problema de Analyse: *determinar a funcção que é o limite das sommas consideradas*.

Vimos no n.º 58-III que, se a funcção $f(x)$ é continua, o limite para que tende S , quando h tende para zero, é uma funcção de X , cuja derivada é igual a $f(X)$. O estudo da questão anterior leva pois a considerar *o problema que tem por fim achar as funcções, quando se conhecem as suas respectivas derivadas*. Este problema é o objecto do *Calculo integral*.

O *Calculo differencial* e o *Calculo integral* constituem a *Analyse infinitesimal*, cuja descoberta é devida a Newton e a Leibnitz. A determinação das tangentes ás curvas e a quadratura das áreas planas foram as duas questões que principalmente levaram estes dois celebres geometras a esta grande descoberta.

Investigações historicas, que aqui não podemos indicar ⁽¹⁾, levaram á conclusão de que Newton inventou a *Analyse infinitesimal* antes de 1666; todavia este grande homem, que junctava ao mais sublime dos genios a mais extraordinaria modestia, só tarde, cedendo a instancias dos amigos, se resolveu a publica-la. Esta publicação foi feita pela primeira vez em 1687 na sua obra immortal: *Principia mathematica philosophiae naturalis*, o monumento mais grandioso da sciencia humana, depois em um appendice á sua *Optica*, publicado em 1704, intitulado *De quadratura curvarum*, mais tarde, em 1711, na obra *Analysis per series, fluctuationes etc.*, e finalmente, com maior desenvolvimento, em um trabalho intitulado *Methodus fluxionum et serierum etc.*, o qual appareceu em 1736, depois da sua morte. Antes da primeira publicação da descoberta de Newton, foi a *Analyse infinitesimal* reinventada por Leibnitz, que publicou a sua descoberta em um artigo celebre, impresso em 1684 nas *Acta eruditorum*, o qual tem por titulo *Nova methodus pro maximis et minimis... et singulare pro illis calculi genus*.

⁽¹⁾ Para um estudo desenvolvido da historia da fundação da Analyse infinitesimal consulte-se a obra magistral de M. Cantor intitulada *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*.

O methodo empregado pelos dois grandes geometras para tratar a questão é identico na sua essencia, mas differente na fórma, mais geometrica e rigorosa na exposição de Newton, mais subjectiva na exposição de Leibnitz.

O novo ramo da *Analyse* a que a descoberta de Newton e Leibnitz deu origem, foi immediatamente cultivado pelos dois irmãos João Bernoulli e Jacob Bernoulli, e depois por Euler e Lagrange, os dois maiores geometras do seu tempo, os quaes completaram a sua fundação. Outros analysts eminentes continuaram depois a obra que os grandes geometras que vimos de mencionar iniciaram, desenvolvendo e completando uns capitulos, junctando outros, transformando alguns em novos ramos, aperfeiçoando as condições para a applicação de alguns theoremas primitivamente enunciados de um modo vago, descobrindo novas applicações, etc., como se verá em diversos logares d'esta obra.

As primeiras obras em que a *Analyse infinitesimal* foi systematicamente exposta, foram o *Traité des infiniments petits* de L'Hospital, publicada em 1696, fructo das lições que a este geometra deu João Bernoulli, a continuação d'aquelle tratado por este ultimo, e o *Treatise on Fluxions* de Maclaurin, publicado em 1742. A estes primeiros ensaios seguiram-se as *Institutiones calculi differentialis* e as *Institutiones calculi integralis* de Euler, publicadas no intervallo de 1755 a 1770, onde aquella analyse foi apresentada pela primeira vez debaixo de fórma completa.

CAPITULO II

Derivadas de primeira ordem das funcções reaes de variaveis reaes

I

Theoremas geraes

61. I. Seja y uma funcção de x definida pela egualdade

$$y = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \dots \pm \varphi_n(x),$$

e procuremos a derivada d'esta funcção relativamente a x , suppondo que $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc. admittem derivadas finitas no ponto x .

Mudando x em $x+h$ e chamando k , l_1 , l_2 , \dots , l_n os augmentos correspondentes de y , $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc., teremos

$$k = l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n,$$

d'onde se deduz, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \lim \frac{l_1}{h} \pm \lim \frac{l_2}{h} \pm \dots$$

ou

$$y' = \varphi'_1(x) \pm \varphi'_2(x) \pm \dots \pm \varphi'_n(x).$$

Logo a derivada de uma somma algebrica de funcções é igual á somma algebrica das derivadas das parcellas.

II. Procuremos a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$$

de duas funcções dadas, que admittam derivadas finitas no ponto x .

Mudando x em $x+h$ e chamando k , l_1 , l_2 os augmentos correspondentes de y , $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, vem

$$y+k = \varphi_1(x+h) \cdot \varphi_2(x+h) = [\varphi_1(x) + l_1] [\varphi_2(x) + l_2].$$

Temos pois

$$k = l_1 \varphi_2(x) + l_2 \varphi_1(x) + l_1 \cdot l_2,$$

e portanto, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \varphi_2(x) \lim \frac{l_1}{h} + \varphi_1(x) \lim \frac{l_2}{h},$$

ou

$$y' = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) + \varphi_2'(x) \varphi_1(x).$$

Do mesmo modo se vê que a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$$

é dada pela fórmula

$$y' = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) + \varphi_1(x) \varphi_2'(x) \dots \varphi_n(x) + \dots + \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n'(x);$$

e portanto a derivada de um producto de funcções é igual á somma dos productos que se obtêm multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.

III. A derivada do quociente das mesmas funcções

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

obtem-se egualando os limites para que tendem os dois membros da identidade

$$\frac{1}{h} \left[\frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right] = \frac{1}{\varphi_2(x) \varphi_2(x+h)} \left[\varphi_2(x) \frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} - \varphi_1(x) \frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} \right],$$

quando h tende para zero, o que dá

$$y' = \frac{\varphi_1'(x) \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \varphi_2'(x)}{[\varphi_2(x)]^2}.$$

Logo a derivada de uma fracção é igual ao quociente que se obtem dividindo pelo quadrado do seu denominador a differença entre os productos da derivada do numerador pelo denominador e da derivada do denominador pelo numerador.

IV. Seja y uma funcção de funcção de x determinada pelas equações

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x , suppondo que $\varphi(x)$ admite uma derivada finita no ponto x , e que $f(u)$ admite uma derivada finita no ponto u correspondente. Chamando l e k os augmentos de u e de y , correspondentes ao augmento h de x , temos (n.º 56)

$$k = f(u+l) - f(u) = l \left(\frac{dy}{du} + \varepsilon \right),$$

$$l = \varphi(x+h) - \varphi(x) = h \left(\frac{du}{dx} + \varepsilon' \right),$$

onde ε e ε' representam quantidades infinitamente pequenas com h ; e portanto

$$\frac{k}{h} = \left(\frac{dy}{du} + \varepsilon \right) \left(\frac{du}{dx} + \varepsilon' \right).$$

Egualando agora os limites para que tendem os dois membros d'esta identidade, quando h tende para 0, vem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Temos pois o theorema seguinte:

Se y é funcção de u e u é funcção de x , a derivada de y relativamente a x é igual ao producto da derivada de y relativamente a u pela derivada de u relativamente a x .

V. Se resolvermos relativamente a x a equação $y = f(x)$, vem uma equação da fórma $x = \varphi(y)$, e a funcção $\varphi(y)$ chama-se *funcção inversa de $f(x)$* .

Supponhamos que as funcções $f(x)$ e $\varphi(y)$ têm um unico valor para cada valor de x e de y , que a funcção $f(x)$ é continua e que a funcção $\varphi(y)$ admite uma derivada finita no

P

ponto y . Chamando k o augmento infinitamente pequeno de y , correspondente ao augmento infinitamente pequeno h de x , temos

$$h = \varphi(y+k) - \varphi(y) = k[\varphi'(y) + \alpha],$$

onde α representa uma quantidade infinitamente pequena com k , e portanto com h .

Logo

$$f'(x) = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{1}{\varphi'(y) + \alpha} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

Logo a derivada de uma função é igual á unidade dividida pela derivada da sua função inversa.

II

Derivadas das funções explicitas algebraicas, logarithmicas, circulares, etc.

62. Vamos agora procurar as derivadas das funções explicitas reaes consideradas na Algebra e na Trigonometria.

Todas estas funções são constituídas por *funções simples*, chamando funções simples aquellas em que a variavel entra affectada de um só dos signaes usados para indicar as combinações analyticas. Por meio dos theoremas demonstrados no n.º 61, póde-se formar a derivada de qualquer função, quando se conhecem as derivadas das funções simples, e vamos porisso procurar estas derivadas.

As funções simples são as seguintes: $a \pm x$, bx , x^m , e^x , $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\text{arccot } x$, $\text{arcsec } x$, $\text{arccsc } x$.

Nem todas estas funções são independentes, e bastaria portanto procurar as derivadas das funções

$$a \pm x, ax, e^x, \sin x,$$

de que as outras dependem. Em todo o caso serão aqui todas consideradas, para termos regras que permittam escrever immediatamente as suas derivadas, attendendo á frequencia com que apparecem na Analyse.

1) A derivada da função $y = a \pm x$ é

$$y' = \pm 1.$$

2) A derivada de $y = bx$ é

$$y' = b.$$

A derivada da função de função

$$y = a + bu,$$

onde u representa uma função de x , é (n.º 61-IV) $y' = bu'$; e vê-se portanto: 1.º que a derivada do producto de uma constante por uma função é igual ao producto da constante pela derivada da função; 2.º que as constantes podem ser consideradas como funções cuja derivada é nulla.

3) No caso da função $y = e^x$, onde e representa o numero definido no n.º 45, temos

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mas, como e^h tende para o limite 1, quando h tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n},$$

onde n representa uma quantidade que tende para o infinito, quando h tende para zero; o que dá

$$h = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

representando por \log os logarithmos neperianos.

Virá pois

$$y' = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{e^x}{\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n},$$

e por consequencia (n.º 45)

$$y' = e^x.$$

*

Se for $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 61-IV)

$$y' = e^u u',$$

o que dá a regra seguinte:

A derivada da exponencial de base e é igual ao producto da mesma exponencial pela derivada do expoente.

Se for $y = a^u$, teremos

$$y = e^{u \log a},$$

e portanto

$$y' = a^u u' \log a.$$

4) A função logarithmica $y = \log x$, onde a variavel x é positiva, dá $x = e^y$, e portanto (n.º 61-V)

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Se for $y = \log u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 61-IV)

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

Logo a derivada do logarithmo neperiano de uma função é igual á derivada da função dividida pela função.

Se for a a base dos logarithmos, teremos (n.º 47-IV)

$$y = \log_a u = \frac{\log u}{\log a}, \quad y' = \frac{u'}{u \log a}.$$

5) No caso da função

$$y = x^m$$

temos

$$y = e^{m \log x},$$

o que dá, quando o expoente de e é real, isto é, quando x é positivo e m real⁽¹⁾,

$$y' = e^{m \log x} \frac{m}{x} = \frac{my}{x} = mx^{m-1}.$$

(1) A derivada da exponencial de expoente imaginario será considerada adiante.

Se x é negativo e m é real, pondo $x = -z$, temos

$$y = (-1)^m z^m,$$

e portanto

$$y' = (-1)^m m z^{m-1} z' = m x^{m-1},$$

como no caso anterior.

Se for $y = u^m$ e $u = \varphi(x)$, vem

$$y' = m u^{m-1} u'.$$

Logo a derivada da potencia do grau m de uma função fórma-se multiplicando o expoente pela potencia de grau $m-1$ da função e pela derivada da função.

A regra precedente abrange as raizes das funções, visto que podem ser representadas por potencias com expoentes fraccionarios. Assim a derivada de $\sqrt[m]{u^n}$ é $\frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} u'$.

Se for $y = u^v$, u e v representando funções de x , temos $y = e^{v \log u}$ e portanto

$$y' = u^v \left(v' \log u + \frac{u'}{u} v \right).$$

6) A função $y = \sin x$ dá

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$y' = \cos x.$$

7) Por ser $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, a derivada da função $y = \cos x$ é dada pela igualdade

$$y' = -\sin x.$$

8) A derivada de $y = \tan x$ obtem-se derivando a fracção $\frac{\sin x}{\cos x}$, o que dá

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Do mesmo modo se acham as derivadas de $\cot x$, de $\sec x$ e de $\operatorname{cosec} x$:

$$9) \ y = \cot x, \ y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$10) \ y = \sec x, \ y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x \sec x,$$

$$11) \ y = \operatorname{cosec} x, \ y' = -\cot x \operatorname{cosec} x.$$

12) Passando ás funções circulares inversas, consideremos primeiramente a função

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x,$$

que é real no intervallo de $x = -1$ a $x = 1$ e tem um numero infinito de ramos.

Applicando o theorema V do n.º 61 ao ramo formado pelos valores de y comprehendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, temos

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}.$$

Do mesmo modo se acha a derivada dos outros ramos da função.

Obtêm-se de um modo semelhante as derivadas de $\operatorname{arc} \cos x$, de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, etc.:

$$13) \ y = \operatorname{arc} \cos x, \ y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}},$$

$$14) \ y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, \ y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$15) \ y = \operatorname{arc} \cot x, \ y' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$16) \ y = \operatorname{arc} \sec x, \ y' = \frac{1}{+x\sqrt{x^2-1}},$$

$$17) \ y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x, \ y' = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}},$$

considerando o ramo de $\arccos x$ compreendido entre 0 e π , e os ramos de $\operatorname{arcsec} x$ e de $\operatorname{arccosec} x$ compreendidos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ ⁽¹⁾.

III

Relações entre as funções e suas derivadas

63. THEOREMA 1.º — *Se a função $f(x)$ tiver uma derivada finita e diferente de zero no ponto a , a função cresce com x , na vizinhança do ponto a , se a quantidade $f'(a)$ é positiva, e decresce, quando x cresce, se $f'(a)$ é negativa.*

É o que se deduz da igualdade

$$f(a \pm h) = f(a) \pm h[f'(a) + \varepsilon].$$

Com effeito, por ser ε infinitamente pequeno com h , póde sempre dar-se ao numero h_1 um valor tão pequeno que a somma $f'(a) + \varepsilon$ tenha o signal de $f'(a)$, quando $|h| < h_1$. Logo, se $f'(a)$ é positiva, temos

$$f(a - h) < f(a) < f(a + h),$$

quando $|h| < h_1$; e portanto, quando x cresce desde $a - h_1$ até $a + h_1$, a função $f(x)$ cresce.

Se porém $f'(a)$ é negativa, temos

$$f(a - h) > f(a) > f(a + h),$$

e a função $f(x)$ decresce, na vizinhança do ponto a , quando x cresce.

64. THEOREMA 2.º — *Se a função $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos, desde x_0 até X , e se for $f(x_0) = 0$ e $f(X) = 0$, existe sempre um valor de x , comprehendido entre x_0 e X , que annulla $f'(x)$.*

⁽¹⁾ Os inventores do calculo infinitesimal deram directa ou indirectamente regras para formar as derivadas e differenciaes das funções algebricas, as unicas que consideraram no primeiro trabalho em que publicaram a sua descoberta, e as funções dependentes de logarithmos ou arcos de circumferencia. João Bernoulli occupou-se da differenciação das funções exponenciaes no trabalho, consagrado ao calculo exponencial, mencionado no n.º 47. Finalmente Euler reuniu todas as regras e considerou esta questão de uma maneira systematica completa nas suas *Institutiones calculi differentialis*.

Esta proposição, conhecida pelo nome de *theorem de Rolle* ⁽¹⁾, foi demonstrada por O. Bonnet do modo seguinte.

Por ser a função $f(x)$ contínua no intervallo de x_0 a X e nulla nos extremos d'este intervallo, ou será constantemente nulla n'este intervallo, ou existirá um ponto x_1 onde terá um valor $f(x_1)$ maior, se a função é positiva, ou menor, se é negativa, do que nos outros pontos ⁽²⁾. No primeiro caso será $f'(x) = 0$, qualquer que seja x . No segundo caso será $f'(x_1) = 0$; porque, se $f'(x_1)$ fosse differente de zero, teríamos, na vesinhança de x_1 ,

$$f(x_1 + h) > f(x_1) > f(x_1 - h),$$

se $f(x_1)$ fosse positivo, e as desigualdades contrarias, se $f(x_1)$ fosse negativo, e porisso $f(x_1)$ não seria nem o maior nem o menor valor de $f(x)$ no intervallo considerado.

THEOREMA 3.º — *Se a função $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos desde x_0 até X , será*

$$f(X) = f(x_0) + (X - x_0)f'(x_1),$$

x_1 representando um valor comprehendido entre x_0 e X .

Com effeito, applicando o theorema precedente á função

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{X - x_0} [f(X) - f(x_0)],$$

que se annulla quando se faz $x = x_0$ e quando se faz $x = X$, temos a egualdade

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = 0,$$

que dá a fórmula enunciada.

Por estar x_1 comprehendido entre x_0 e X , pode pôr-se $x_1 = x_0 + \theta h$, representando por h a differença $X - x_0$ e por θ uma quantidade positiva desconhecida, comprehendida entre zero e a unidade; e temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

⁽¹⁾ Por ter sido dado por Rolle, no caso particular das funções inteiras, no seu *Traité d'Algèbre*, publicado em 1690.

⁽²⁾ O. Bonnet considerava como evidente a existencia de um valor $f(x_1)$, maior do que os outros valores da função. Weierstrass demonstrou rigorosamente este facto, que é o objecto do theorema 3.º do n.º 37.

D'este theorema, devido a Lagrange, deduzem-se os dois corollarios seguintes:

1.º *Se a derivada de uma funcção $f(x)$ é nulla n'um certo intervallo, a funcção é constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, sendo x_0 e $x_0 + h$ dois valores de x pertencentes ao intervallo considerado, por estar $x_0 + \theta h$ comprehendido no intervallo de x_0 a $x_0 + h$, será $f'(x_0 + \theta h) = 0$, e portanto $f(x_0 + h) = f(x_0)$.

2.º *Se duas funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem uma mesma derivada finita em todos os pontos d'um certo intervallo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, por ser nulla a differença $f'(x) - F'(x)$ das derivadas das duas funcções no intervallo considerado, é constante (corollario precedente) a funcção correspondente $f(x) - F(x)$ no mesmo intervallo.

THEOREMA 4.º — *Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem derivadas $f'(x)$ e $F'(x)$ finitas em todos os pontos desde x_0 até X , será*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]},$$

se a funcção $F'(x)$ for differente de zero no intervallo comprehendido entre x_0 e X .

Demonstra-se este theorema, devido a Cauchy, applicando o theorema de Rolle á funcção

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(x) - [F(x_0) - F(x)] \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)},$$

que se annulla nos pontos x_0 e X ; o que dá a egualdade

$$\varphi'(x_1) = -f'(x_1) + F'(x_1) \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = 0,$$

ou

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]}.$$

NOTA. Deve-se observar que os theoremas 2.º, 3.º e 4.º ainda têm logar quando as funcções $f(x)$ e $F(x)$ não têm derivadas finitas nos pontos x_0 e X , se todavia estas funcções são contínuas n'estes pontos. É o que resulta immediatamente das demonstraões que vimos de dar, d'estes theoremas.

Q

IV

Funções de muitas variáveis

65. Passando agora ás funções de muitas variáveis, consideremos a função

$$z = f(x, y, \dots)$$

das variáveis independentes x, y , etc.

Podemos derivar z relativamente a x , considerando as outras variáveis como constantes, ou relativamente a y , considerando as outras variáveis como constantes, etc. A estas derivadas dão-se respectivamente os nomes de *derivada parcial* de z relativamente a x , de *derivada parcial* de z relativamente a y , etc.

Para representar as derivadas parciais de primeira ordem de z relativamente a x, y, \dots empregam-se as notações $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$. As derivadas de $\frac{\partial z}{\partial x}$ relativamente a x, y, \dots representam-se pelas notações $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$. Em geral, representa-se por $\frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^b \dots}$ a derivada parcial de ordem n que resulta de derivar a função dada a vezes relativamente a x , depois o resultado b vezes relativamente a y , etc.

Empregam-se também muitas vezes, para representar as derivadas de primeira ordem de z , as notações $f'_x(x, y, \dots), f'_y(x, y, \dots), \dots$, para representar as derivadas de segunda ordem, as notações $f''_{xx}(x, y, \dots), f''_{xy}(x, y, \dots), \dots$, etc.

66. THEOREMA 1.º — Se as derivadas $f''_{xy}(x, y)$ e $f''_{yx}(x, y)$ forem funções continuas de x e y , é

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Com effeito, applicando o theorema 3.º do n.º 64 ás funções

$$f(x, y + k, \dots) - f(x, y, \dots), f'_x(x + \theta_1 h, y, \dots),$$

considerando na primeira x como variavel independente e na segunda y , vem

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) - f(x+h, y, \dots) - [f(x, y+k, \dots) - f(x, y, \dots)] \\ = h[f'_x(x+\theta_1 h, y+k, \dots) - f'_x(x+\theta_1 h, y, \dots)] \\ = hk f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \dots), \end{aligned}$$

onde θ_1 e θ_2 representam duas quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Applicando o mesmo theorema ás funcções

$$f(x+h, y, \dots) - f(x, y, \dots), f'_y(x, y+\theta'k, \dots),$$

considerando a primeira como funcção de y e a segunda como funcção de x , vem do mesmo modo

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y+k, \dots) - [f(x+h, y, \dots) - f(x, y, \dots)] \\ = hk f''_{yx}(x+\theta h, y+\theta'k, \dots), \end{aligned}$$

onde θ e θ' representam quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Egualando estes dois resultados, vem a relação

$$f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \dots) = f''_{yx}(x+\theta h, y+\theta'k, \dots),$$

da qual se deduz o theorema enunciado, fazendo tender h e k para zero.

THEOREMA 2.^o — *Se as derivadas*

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial t \partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial t \partial v \partial u}$$

forem funcções continuas de u e v , póde-se inverter a ordem das duas derivações consecutivas, relativas a u e v , e temos

$$\frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \partial u \partial v \partial w \dots} = \frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \partial v \partial u \partial w \dots}.$$

Com effeito, temos primeiramente, em virtude do theorema anterior,

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial t \partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial x \dots \partial t} \frac{\partial^{m-2} z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \frac{\partial^{m-2} z}{\partial x \dots \partial t},$$

*

e portanto

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial t \partial u \partial v} = \frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial t \partial v \partial u}.$$

Derivando em seguida ambos os membros d'esta identidade relativamente a w , etc., obtem-se a egualdade que se queria demonstrar.

Se notarmos que qualquer mudança na ordem em que se effectuam as derivações relativas a x, y , etc. pôde ser obtida por mudanças successivas da ordem de duas derivações, pôde-se, por applicações successivas do theorema que vimos de demonstrar, inverter a ordem de qualquer numero de derivações. Em todas estas mudanças deve-se attender ás condições relativas á continuidade das derivadas impostas pelo theorema.

67. Vamos agora estender o theorema 3.º do n.º 64 ás funcções de muitas variaveis independentes.

Applicando este theorema á funcção $f(x, y+k)$, considerando-a como funcção de x , vem

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + hf'_x(x+\theta_1 h, y+k),$$

quando a funcção considerada tem uma derivada parcial relativa a x , finita em todos os pontos do intervallo de x a $x+h$.

Applicando o mesmo theorema á funcção $f(x, y)$, considerando-a como uma funcção de y , vem

$$f(x, y+k) = f(x, y) + kf'_y(x, y+\theta_2 k),$$

quando a funcção considerada tem uma derivada parcial relativa a y , finita em todos os pontos do intervallo de y a $y+k$.

Temos pois

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf'_x(x+\theta_1 h, y+k) + f'_y(x, y+\theta_2 k).$$

Do mesmo modo se acha, no caso de muitas variaveis, a fórmula seguinte:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots, t+l) &= f(x, y, \dots) \\ &+ hf'_x(x+\theta_1 h, y+k, \dots, t+l) \\ &+ kf'_y(x, y+\theta_2 k, \dots, t+l) \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ lf'_t(x, y, \dots, t+\theta_n l). \end{aligned} \right.$$

68. D'este theorema deduzem-se os dois corollarios importantes seguintes:

1.^o Se as derivadas parciaes de primeira ordem da funcção $f(x, y, \dots)$ forem todas finitas, $f(x, y, \dots)$ é uma funcção continua de x, y , etc. Com effeito, o primeiro membro da fórmula (1) tende para $f(x, y, \dots)$, quando h, k , etc. tendem para zero.

2.^o Se $f'_x(x, y, \dots)$ for uma funcção continua de x, y, \dots, t , se $f'_y(x, y, \dots)$ for uma funcção finita de x e uma funcção continua das outras variaveis, e assim successivamente, temos

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots) &= h f'_x(x, y, \dots) + k f'_y(x, y, \dots) + \dots \\ &+ \alpha_1 h + \alpha_2 k + \dots, \end{aligned} \right.$$

onde α_1, α_2 , etc. representam quantidades que tendem para zero, quando todas as quantidades h, k , etc. tendem para zero.

Com effeito, temos n'este caso

$$\begin{aligned} f'_x(x + \theta_1 h, y + k, \dots) &= f'_x(x, y, \dots) + \alpha_1, \\ f'_y(x_1, y + \theta_2 k, \dots) &= f'_y(x, y, \dots) + \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

onde α_1, α_2 , etc. representam quantidades que tendem para zero, quando h, k , etc. tendem para zero.

Substituindo estes valores na fórmula (1), vem a fórmula (2), que se queria demonstrar.

Nas applicações que fizermos da fórmula (2), suporemos, algumas vezes, para simplificar os enunciados das proposições, que $f'_x(x, y, \dots)$, $f'_y(x, y, \dots)$, ... são funcções continuas de todas as variaveis x, y, \dots, t .

69. *Derivadas das funcções compostas.* — A funcção $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, onde u_1, u_2 , etc. representam funcções de x , dá se o nome de *funcção composta* de x por meio de u_1, u_2 , etc.

Da fórmula (2) deduz-se uma regra importante para derivar estas funcções.

Dê-se a x o augmento infinitamente pequeno h e sejam l_1, l_2 , etc. os augmentos correspondentes de u_1, u_2 , etc. Se a funcção $f(u_1, u_2, \dots)$ admitte derivadas parciaes relativamente a u_1, u_2 , etc., finitas nos pontos (u_1, u_2, \dots) , correspondentes aos valores dados a x , e se a derivada de $f(u_1, u_2, \dots)$ relativamente a u_1 é uma funcção continua de u_1, u_2, \dots, u_n , se a derivada de $f(u_1, u_2, \dots)$ relativamente a u_2 é uma funcção continua de u_2, u_3, \dots, u_n , e assim successivamente, a fórmula (2) dá

$$\begin{aligned} f(u_1 + l_1, u_2 + l_2, \dots) - f(u_1, u_2, \dots) &= l_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + l_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots \\ &+ \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots, \end{aligned}$$

onde α_1, α_2 , etc. representam quantidades que tendem para zero, quando l_1, l_2 , etc. tendem para zero.

Temos pois, quando h tende para zero,

$$\begin{aligned} \lim \frac{f(u_1 + l_1, u_2 + l_2, \dots) - f(u_1, u_2, \dots)}{h} \\ = \frac{\partial f}{\partial u_1} \lim \frac{l_1}{h} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \lim \frac{l_2}{h} + \dots \\ + \alpha_1 \lim \frac{l_1}{h} + \alpha_2 \lim \frac{l_2}{h} + \dots, \end{aligned}$$

e portanto

$$(3) \quad \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx}.$$

Esta fórmula importante dá a derivada das funções compostas, quando são conhecidas as derivadas das funções que entram na sua composição, e contém como caso particular os theoremas 1.º, 2.º, 3.º e 4.º do n.º 61.

70. Funções homogêneas. — Diz-se que $f(x, y, \dots)$ é uma função *homogênea*, do grau m , quando satisfaz á condição

$$f(tx, ty, \dots) = t^m f(x, y, \dots).$$

Derivando os dois membros d'esta identidade relativamente a t por meio do theorema anterior, vem

$$f'_x(tx, ty, \dots)x + f'_y(tx, ty, \dots)y + \dots = mt^{m-1}f(x, y, \dots)$$

e, pondo $t = 1$,

$$f'_x(x, y, \dots)x + f'_y(x, y, \dots)y + \dots = mf(x, y, \dots).$$

Consiste n'esta egualdade o *theorem de Euler* relativo ás funções homogêneas⁽¹⁾.

(1) A theoria da differenciação das funções de muitas variaveis foi considerada pela primeira vez de um modo systematico geral por Euler nas suas *Inst. Cal. diff.*, onde vem tambem, como applicação d'esta theoria, o theorema que vem de ser demonstrado.

71. A noção de diferencial póde ser estendida ao caso das funções de muitas variáveis independentes.

Se diferenciarmos a função $z = f(x, y, \dots)$ relativamente a cada uma das variáveis, considerando as outras como constantes, obtemos os resultados

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad \dots,$$

a que se dão os nomes de *differenciaes parciaes* de z relativamente a x , a y , etc. A somma d'estas diferenciaes parciaes dá-se o nome de *differencial total* de z . Representando-a por dz , temos pois a egualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \dots,$$

que define dz .

Seja $z = f(u_1, u_2, \dots)$ e supponhamos que u_1, u_2, \dots são funções de x, y, \dots ; temos

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots \right) dx \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots \right) dy \\ &+ \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy + \dots, \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} dx + \frac{\partial u_2}{\partial y} dy + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Logo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \dots$$

Vê-se pois que dz tem a mesma expressão, quer u_1, u_2, \dots sejam variáveis independentes, quer sejam dependentes de outras.

Da egualdade precedente resultam, como corollario, as relações

$$d(u_1 + u_2 + \dots) = du_1 + du_2 + \dots$$

$$d(u_1 u_2) = u_1 du_2 + u_2 du_1, \quad d \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 du_1 - u_1 du_2}{u_2^2},$$

as quaes mostram que ás regras, dadas no n.º 61, para formar as derivadas da somma, producto e quociente de funcções, correspondem outras analogas para formar as respectivas differenciaes.

V

Funcções implicitas

72. Consideremos agora as funcções implicitas, isto é, procuremos a derivada relativamente a x de uma funcção y dada pela equação

$$(1) \quad F(x, y) = 0.$$

Seja $y = \varphi(x)$ uma funcção que tenha um unico valor para cada valor de x e que satisfaça a esta equação, e supponhamos que $\varphi(x)$ admite uma derivada finita. N'este caso o theorema relativo á derivação das funcções compostas (n.º 69) dá

$$(2) \quad F_x(x, y) + F_y(x, y) y' = 0;$$

e portanto temos a fórmula

$$(3) \quad y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)},$$

por meio da qual se obtém a derivada da funcção $\varphi(x)$, sem resolver a equação proposta relativamente a y .

Por meio da fórmula precedente temos a derivada y' expressa em funcção de x e y . Se quizermos esta derivada só expressa em funcção de uma variavel, eliminaremos a outra por meio da equação proposta.

Derivando pela mesma regra a equação (2), vem a equação

$$F_{xx}(x, y) + 2 F_{xy}(x, y) y' + F_{yy}(x, y) y'^2 + F_y(x, y) y'' = 0$$

que determina y'' .

Continuando do mesmo modo, obtêm-se equações que dão y''' , $y^{(4)}$, etc.

As equações que se obtêm derivando successivamente uma equação dada, são respectivamente do primeiro grau relativamente a y' , y'' , y''' , etc. Porém este grau póde elevar-se, já fazendo desaparecer radicaes que lá entrem, já eliminando entre ellas algumas quantidades.

Assim, por exemplo, a equação

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

dá, derivando os seus dois membros relativamente a x , considerando y como função de x , a seguinte :

$$a^2 y y' + b^2 x = 0,$$

que determina y' .

Se quizermos exprimir a derivada só em função de x , temos de eliminar y entre estas equações, o que dá

$$a^2 (a^2 - x^2) y'^2 = b^2 x^2.$$

Esta equação, ou a anterior, determinam as derivadas dos dois ramos de função que se obteriam resolvendo a proposta relativamente a y .

73. Toda a relação da forma

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada da ordem mais elevada, tem o nome de *equação diferencial da ordem n* .

O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que da equação

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0,$$

que contem n constantes arbitrárias c_1, c_2 , etc., resulta uma equação diferencial da ordem n , independente d'estas constantes.

Com effeito, derivando n vezes esta equação, obteremos n equações da forma

$$\begin{aligned} F_1(x, y, y', c_1, c_2, \dots) &= 0, \\ F_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \dots) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ F_n(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, c_1, c_2, \dots) &= 0, \end{aligned}$$

entre as quaes e a proposta podemos eliminar as n constantes arbitrárias. Chega-se assim a uma equação da forma

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

independente d'estas constantes.

R

Em Geometria esta equação representa uma propriedade commum a todas as curvas correspondentes á equação proposta.

EXEMPLO. Consideremos a equação d'um systema de *conicas homofocaes*

$$\frac{x^2}{A+c} + \frac{y^2}{B+c} = 1,$$

onde A e B representam constantes determinadas e c uma constante arbitraria.

Derivando esta equação relativamente a x, vem

$$\frac{x}{A+c} + \frac{yy'}{B+c} = 0.$$

A eliminação de c entre esta equação e a anterior leva á *equação differencial* das conicas consideradas

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - A + B)y' - xy = 0.$$

Por cada ponto do plano passam duas conicas, que correspondem aos dois valores que a equação proposta dá para c, quando se substituem n'ella x e y pelas coordenadas do ponto considerado. A equação differencial que vimos de obter, dá para y' dois valores y'_1 e y'_2, que satisfazem á condição y'_1 y'_2 = -1; logo as tangentes a estas duas conicas, no ponto em que se cortam, são perpendiculares uma á outra.

74. As derivadas parciaes das funcções implicitas de muitas variaveis obtêm-se procedendo como no n.º 72.

Assim as derivadas parciaes relativamente a x e y da funcção implicita z, dada pela equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

obtêm-se por meio das egualdades

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Em geral, se tivermos as n equações com m+n variaveis, das quaes n sejam dependentes e m independentes:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

podemos achar as derivadas das variáveis dependentes z_1, z_2, \dots, z_n relativamente ás variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_m resolvendo as $m \cdot n$ equações do primeiro grau

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_1} = 0,$$

.....

que resultam de derivar as anteriores relativamente a x_1, x_2 , etc., considerando z_1, z_2 , etc. como funcções d'estas variáveis.

Derivando estas equações relativamente a x_1, x_2 , etc., obtêm-se outras, que determinam as derivadas de segunda ordem de z_1, z_2 , etc., e assim successivamente.

75. Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas parciais

$$f\left(x_1, x_2, \dots, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots\right) = 0$$

tem o nome de *equação ás derivadas parciais*. Se a derivada da ordem mais elevada que entra n'esta equação, é da ordem n , diz-se que a equação é da ordem n . O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que de toda a equação

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0,$$

onde $\varphi(u)$ representa uma funcção arbitraria de u e u representa uma funcção determinada de x, y e z , resulta uma equação ás derivadas parciais de primeira ordem, independente de φ , a que satisfaz a funcção z dada por aquella equação.

Com effeito, derivando-a relativamente a x e a y e representando $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ por p e q , temos as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot p + \frac{\partial F}{\partial \varphi(u)} \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot p \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot q + \frac{\partial F}{\partial \varphi(u)} \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot q \right) = 0,$$

que, pela eliminação de $\varphi(u)$ e $\varphi'(u)$ entre ellas e a proposta, dão uma equação ás derivadas parciais de primeira ordem, independente da funcção arbitraria.

EXEMPLOS. 1.º A equação geral das superficies cylindricas

$$x - az = \varphi(y - bz)$$

dá, derivando relativamente a x e a y , considerando z como função d'estas variaveis,

$$\begin{aligned} 1 - a p &= -b p \varphi'(y - bz), \\ -a q &= (1 - b q) \varphi'(y - bz); \end{aligned}$$

e portanto, eliminando $\varphi'(y - bz)$, temos a equação ás derivadas parciaes das superficies cylindricas

$$a p + b q = 1,$$

que deve representar uma propriedade commum a todas estas superficies. Adiante veremos qual é esta propriedade.

2.º A equação geral das superficies de revolução

$$\alpha x + \beta y + z = \varphi[(x - k)^2 + (y - l)^2 + z^2],$$

cujos eixos coincidem com a recta representada pelas equações

$$x = \alpha z + k, \quad y = \beta z + l,$$

dá do mesmo modo a equação ás derivadas parciaes d'estas superficies

$$(a + p)(y - l + qz) = (\beta + q)(x - k + pz).$$

3.º Finalmente da equação geral das superficies conicas

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi\left(\frac{y - b}{z - c}\right)$$

resulta a equação ás derivadas parciaes d'estas superficies

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c.$$

76. Viu-se nos numeros anteriores o modo de achar as derivadas das funções implicitas, quando se sabe *á priori*, como acontece em muitos casos, que a função que se considera admite derivada. Passando agora ao estudo das condições geraes para a existencia de derivada d'estas funções, vamos demonstrar os theoremas seguintes⁽¹⁾:

THEOREMA 1.º Se a equação

$$F(x, y) = 0$$

⁽¹⁾ Os fundadores do calculo differencial sabiam formar as derivadas das funções definidas por equações, e Newton dedicou mesmo algumas paginas do seu *Methodus fluxionum etc.* a este assumpto, ao qual Euler

for satisfeita pelos valores x_0 e y_0 , dados a x e a y , se a função $F(x, y)$ admitir derivadas parciais $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ continuas no ponto (x_0, y_0) , e se n'este ponto a derivada $F'_y(x, y)$ for differente de zero, y é uma função definida de x na vizinhança do ponto (x_0, y_0) , e esta função é continua e admite uma derivada finita n'este ponto.

Pondo $x - x_0 = h$ e $y - y_0 = k$ e representando por α_1 , α_2 e α_3 tres quantidades infinitamente pequenas com h e k , temos (n.º 68-2.º), quando $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ são finitas no intervalo de x_0 a $x_0 + h$ e y_0 a $y_0 + k$,

$$F(x, y) = [F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1] h + [F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2] k$$

e, em virtude da continuidade da função $F'_y(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) ,

$$F'_y(x, y) = F'_y(x_0, y_0) + \alpha_3.$$

Seja h_1 um numero de valor absoluto tão pequeno que, para os valores de $|h|$ e $|k|$ que não sejam maiores do que $|h_1|$, as quantidades $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ sejam finitas e as quantidades

$$F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2, \quad F'_y(x_0, y_0) + \alpha_3$$

(cujos primeiros termos são differentes de zero, por hypothese, e cujos segundos termos tendem para zero com h e k) sejam differentes de zero e tenham o signal de $F'_y(x_0, y_0)$; e dêem-se na primeira das fórmulas precedentes a k o valor h_1 e a h valores taes que seja $|h| < h_1^2$. Teremos, pondo $h = \pm \theta h_1^2$ (onde θ representa um numero positivo menor do que a unidade)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \pm [F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1] \theta h_1^2 + [F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2] h_1 \\ &= h_1 [F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2] \left[1 \pm \theta \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2} h_1 \right]. \end{aligned}$$

D'esta fórmula conclue-se que $F(x, y)$ tem o signal de $h_1 F'_y(x_0, y_0)$, quando se dá a $|h_1|$ um valor tão pequeno que seja

$$\left| \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2} h_1 \right| < 1;$$

e portanto que, para cada valor $x_0 + h$ de x , comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, $F(x, y)$ muda de signal, quando y varia desde $y_0 - h_1$ até $y_0 + h_1$.

A cada valor de x comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$ corresponde pois sempre um

deu, nas suas *Institutiones calculi differentialis*, a fórmula geral actualmente empregada. Durante muito tempo, porém, os geometras admittiram, sem demonstração, a existencia de derivada das funções implicitas que consideraram, e foi Cauchy quem principalmente estudou as condições para que esta circumstancia tenha logar.

valor de y , compreendido entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$, que satisfaz (n.º 37-1.º) á equação $F(x, y) = 0$; e não póde corresponder mais (n.º 64-2.º) do que um, visto que a derivada $F'_y(x, y)$ não é nulla n'este intervallo. Logo a collecção dos valores de y compreendidos entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$, determinados pela equação $F(x, y) = 0$, quando se dão a x os valores compreendidos entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, constitue uma funcção $\varphi(x)$, definida no intervallo considerado, a qual satisfaz a esta equação.

Como além d'isso, quando h_1 tende para zero, x tende para x_0 e y tende para y_0 , vê-se que $\varphi(x)$ é continua no ponto x_0 .

Finalmente a funcção $y = \varphi(x)$ admite uma derivada finita no ponto (x_0, y_0) . Com effeito, mudando na equação proposta x_0 em $x_0 + h$ e y_0 em $y_0 + k$ (representando agora por $y_0 + k$ o valor que toma a funcção $y = \varphi(x)$ quando a x se dá o valor $x_0 + h$), temos

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + F'_x(x_0, y_0)h + F'_y(x_0, y_0)k + \alpha_1 h + \alpha_2 k = 0$$

ou

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0)\frac{k}{h} + \alpha_1 + \alpha_2\frac{k}{h} = 0.$$

Temos pois, fazendo tender h para zero e notando que, por ser $\varphi(x)$ uma funcção continua de x , k tende tambem para zero,

$$\varphi'(x_0) = \lim \frac{k}{h} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)},$$

o que concorda com o que se disse no n.º 72.

Ao que vem de dizer-se accrescentaremos ainda o seguinte.

Supponhamos que $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ são funcções continuas no ponto (x, y) , quando x e y estão respectivamente compreendidos nos intervallos $(x_0 - h_1^2, x_0 + h_1^2)$ e $(y_0 - h_1, y_0 + h_1)$, precedentemente determinados. N'este caso o ponto (x, y) satisfaz ás condições impostas no enunciado do theorema ao ponto (x_0, y_0) , e temos portanto, para todos os valores de x pertencentes ao intervallo $(x_0 - h_1^2, x_0 + h_1^2)$,

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

onde $y = \varphi(x)$.

Vê-se pois que, no intervallo considerado, $\varphi'(x)$ é uma funcção definida de x , e que esta funcção admite, no mesmo intervallo, uma derivada finita $\varphi''(x)$, quando o numerador e o denominador da sua expressão a admittirem, isto é, quando $F(x, y)$ admittir derivadas parciaes de segunda ordem relativamente a x e y que sejam continuas nos intervallos precedentemente assignados a estas variaveis.

Do mesmo modo se consideram as derivadas seguintes.

THEOREMA 2.^o *Se a equação*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

for satisfeita pelos valores $a_1, a_2, \dots, a_m, y_0$, dados a x_1, x_2, \dots, x_m, y ; se a função $F(x_1, \dots, x_m, y)$ admittir derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a x_1, x_2, \dots, x_m, y , continuas no ponto $(a_1, a_2, \dots, a_m, y_0)$; e se n'este ponto a derivada F_y for differente de zero, y é uma função definida de x_1, x_2, \dots, x_m , na visinhança do ponto $(a_1, a_2, \dots, a_m, y_0)$, e esta função é continua e admitte n'este ponto derivadas parciaes finitas relativamente a x_1, x_2 , etc.

A demonstração d'este theorema é semelhante á demonstração empregada para estabelecer o theorema anterior.

THEOREMA 3.^o *Se as equações*

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0,$$

onde entram as variaveis independentes x_1, x_2, \dots, x_m e as variaveis dependentes z_1, z_2, \dots, z_n , foram satisfeitas pelos valores $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$, dados a $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n$; se as funções F_1, F_2, \dots, F_n admittirem derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n$, que sejam funções continuas d'estas variaveis no ponto $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$; e se n'este ponto o determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

for differente de zero; z_1, z_2, \dots, z_n são funções definidas de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, na visinhança do ponto considerado, e admittem n'este ponto derivadas parciaes finitas relativamente a $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$.

Como este theorema vem de ser demonstrado no caso de ser dada uma só equação, para o demonstrar completamente, vamos provar que, se é verdadeiro no caso de serem dadas $n-1$ equações, ainda é verdadeiro quando são dadas n equações.

Por não ser, por hypothese, nullo no ponto $(a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots)$ o determinante J , tambem não podem ser nullos n'este ponto todos os determinantes menores que resultam de

supprimir a primeira columna. Seja pois, por exemplo, diferente de zero o determinante

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}.$$

As equações $F_2=0, \dots, F_n=0$ determinam n'este caso z_2, z_3, \dots, z_n em funcção de $z_1, x_1, x_2, \dots, x_m$, e, substituindo estes valores em F_1 , vem

$$F_1(x_1, x_2, \dots, z_1, z_2, \dots) = \varphi(x_1, x_2, \dots, z_1).$$

Temos portanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_1}.$$

Eliminando depois $\frac{\partial z_2}{\partial z_1}, \frac{\partial z_3}{\partial z_1}$, etc. entre esta equação e as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_1} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} + \frac{\partial F_n}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_1} &= 0, \end{aligned}$$

vem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{J}{J_1}.$$

Vê-se pois que $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$ é diferente de zero no ponto (b_1, a_1, a_2, \dots) ; e portanto que (th. 2.º) a equação $\varphi=0$ determina z_1 em funcção de x_1, x_2 , etc., que esta funcção satisfaz á equação $F_1=0$ conjunctamente com os valores de z_1, z_2 , etc. dados, por hypothese, pelas equações $F_2=0, F_3=0$, etc., e que a funcção z_1 admite tambem derivadas parciaes relativamente a x_1, x_2 , etc. no ponto (b_1, a_1, a_2, \dots) .

Derivadas dos determinantes. Determinantes funcionaes

77. Procuremos agora a derivada do determinante

$$f(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

onde u_1, u_2, v_1, v_2 são funções de x .

Mudando x em $x+h$ e chamando k_1, k_2, l_1, l_2 os aumentos correspondentes de u_1, u_2, v_1, v_2 , vem

$$f(x+h) = \begin{vmatrix} u_1 + k_1 & u_2 + k_2 \\ v_1 + l_1 & v_2 + l_2 \end{vmatrix},$$

ou, em virtude de um theorema bem conhecido,

$$f(x+h) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & k_2 \\ v_1 & l_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & u_2 \\ l_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}.$$

Temos pois

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \begin{vmatrix} u_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u'_1 & u_2 \\ v'_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

O raciocínio precedente applica-se evidentemente a um determinante com qualquer numero de columnas, e vê-se que *a derivada de um determinante é igual á somma dos determinantes que se obtêm substituindo cada columna do determinante proposto por outra formada pelas derivadas dos termos d'aquella.*

78. Consideremos as funções

[illegible]

S

Com as derivadas d'estas funcções forme-se o determinante

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

que se representa tambem por

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

e que se chama *determinante funcional* ou *jacobiano*. Este determinante, estudado pela primeira vez por Jacobi, apparece em muitas questões e tem propriedades muito importantes, para o estudo das quaes se póde recorrer á memoria intitulada *De determinantibus functionalibus* ⁽¹⁾ d'este eminente geometra. No theorema 3.º do n.º 76 vimos já uma questão em que intervem este determinante. Aqui vamos demonstrar, a respeito d'elle, os theoremas seguintes, dados na referida memoria.

I. Supponhamos que as funcções y_1, y_2, \dots, y_n admittem derivadas parciaes relativas a x_1, x_2, \dots, x_n e que estas derivadas são funcções continuas d'estas variaveis. N'este caso temos o theorema seguinte:

1.º Se uma das funcções y_1, y_2, \dots, y_n , por exemplo y_1 , for uma funcção das outras e admittir derivadas parciaes, relativamente a y_2, y_3, \dots, y_n , que sejam funcções continuas d'estas variaveis, o determinante (2) é identicamente nullo.

2.º Se o determinante (2) for identicamente nullo, mas não o for um dos seus menores de primeira ordem, uma das quantidades y_1, y_2 , etc. (aquella cujas derivadas não entram n'este determinante menor) é funcção das outras, e esta funcção é continua e admitte derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante menor considerado não é nullo.

3.º Em geral, se forem identicamente nulos o determinante (2) e os seus menores até á ordem i e não o for um dos determinantes menores da ordem $i+1$, $i+1$ das quantidades y_1, y_2, \dots, y_n (aquellas cujas derivadas não entram n'este determinante menor) são funcções das restantes, e estas funcções são continuas e admittem derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante de ordem $i+1$ considerado não é nullo.

Para demonstrar esta proposição, consideremos sómente tres funcções

$$(1') \quad y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

⁽¹⁾ Jacobi: *Gesammelte Werke*, tom. III.

É facil de ver que o raciocinio que vamos empregar, é applicavel a maior numero de funcções.

Se for $y_1 = \varphi(y_2, y_3)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_3},\end{aligned}$$

e portanto, eliminando $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}$ entre estas equações,

$$(2') \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

o que demonstra a primeira parte do theorema.

Para demonstrar a proposição reciproca, supponhamos que o determinante (2') é identicamente nullo e que um dos determinantes menores de segunda ordem não é identicamente nullo, por exemplo o determinante

$$\frac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}.$$

Em virtude do theorema 3.º do n.º 76, as duas ultimas equações (1') determinam x_2 e x_3 como funcções de x_1, y_2 e y_3 , e, nos pontos em que este determinante não é nullo, estas funcções admittem derivadas parciaes relativas a x_1, y_2, y_3 , dadas pelas equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Substituindo estes valores de x_2 e x_3 na primeira das equações (1'), vem

$$y_1 = \varphi(x_1, y_2, y_3),$$

*

e, em virtude do theorema relativo á derivação das funcções compostas, y_1 admite derivadas parciaes relativamente a x_1 , y_2 e y_3 . A derivada relativa a x_1 é dada pela equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1},$$

onde se devem substituir $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ pelos seus valores, tirados das equações anteriores, o que dá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)}}{\frac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}}.$$

Como o segundo membro d'esta egualdade é, por hypothese, identicamente nullo, é identicamente nulla a derivada de φ relativamente a x_1 ; portanto φ é independente de x_1 , e temos

$$y_1 = \varphi(y_2, y_3),$$

que é o que se queria demonstrar.

Se todos os determinantes menores de primeira ordem do determinante (1') forem identicamente nulos, recorre-se aos determinantes de segunda ordem, que no caso considerado não podem ser todos identicamente nulos, sem que as funcções sejam todas constantes. Seja pois $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ um dos determinantes de terceira ordem que não é identicamente nullo. A ultima das equações (1') determinará x_3 em funcção de x_1 , x_2 e y_3 , e as suas derivadas relativamente a x_1 e x_2 serão dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

Substituindo o valor de x_3 na primeira das equações (1'), vem

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2, y_3),$$

e as derivadas de φ relativamente a x_1 e x_2 são dadas pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

ou, eliminando $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ por meio das equações anteriores,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial (f_1, f_3)}{\partial (x_1, x_3)}}{\frac{\partial f_3}{\partial x_3}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial (f_1, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}}{\frac{\partial f_3}{\partial x_3}}.$$

Como, por hypothese, os segundos membros d'estas equações são identicamente nulos, a função φ é independente de x_1 e x_2 , e temos

$$y_4 = \varphi(y_3)$$

Do mesmo modo a segunda das equações (1') dá

$$y_2 = \psi(y_3)$$

II. Se nas funções f_1, f_2, \dots, f_n substituirmos as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n por outras, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, ligadas com as primeiras por equações dadas, o jacobiano das novas funções estará ligado com o jacobiano (2) pela relação

$$(4) \quad \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)} \cdot \frac{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$$

Para demonstrar este theorema, basta substituir no determinante (2) as derivadas que lá entram pelos seus valores, tirados das equações que se formam dando a k e a i os valores $1, 2, \dots, n$ na equação

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_1} = \frac{\partial y_k}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial y_k}{\partial \theta_n} \cdot \frac{\partial \theta_n}{\partial x_1}$$

e applicar depois o theorema da multiplicação dos determinantes.

A fórmula (4) contém o theorema 4.º do n.º 61, o qual corresponde ao caso de ser $n=1$.

III. Se, no theorema precedente, as equações que ligam as novas variáveis às antigas são as equações lineares

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = a_1^{(1)} x_1 + \dots + a_n^{(1)} x_n \\ \vdots \\ \theta_n = a_1^{(n)} x_1 + \dots + a_n^{(n)} x_n \end{array} \right.$$

(6)

$$M = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

79. Se as funções f_1, \dots, f_n forem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ de uma função $y = f(x_1, \dots, x_n)$, o determinante (2) reduz-se ao determinante

$$\begin{array}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{array},$$

que se chama *hesseano*, para recordar o nome do eminente geometra O. Hesse, que primeiro o considerou.

A respeito d'este determinante, limitar-nos-hemos aqui a procurar a relação entre o *hesseano* da função dada e o *hesseano* da função em que esta se transforma pela substituição das variáveis x_1, x_2 , etc. pelas variáveis θ_1, θ_2 , etc., ligadas com as primeiras pelas equações (5).

Por ser y função de x_1, \dots, x_n e portanto de $\theta_1, \dots, \theta_n$, temos, em virtude das fórmulas (5),

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \dots + a_1^{(n)} \frac{\partial y}{\partial \theta_n}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \frac{\partial y}{\partial x_n} = a_n^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \dots + a_n^{(n)} \frac{\partial y}{\partial \theta_n}. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores em

$$\frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)}$$

e attendendo ao theorema da multiplicação dos determinantes, vem

$$\frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)} = M \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

Logo a fórmula (6) dá

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = M^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

VII

Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva

80. Seja $f(x)$ uma função de x continua em todos os pontos do intervallo de x_0 a X . Decomponha-se $X - x_0$ em n intervallos eguaes a h_1, h_2, \dots, h_n , o que dá

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = X - x_0,$$

e representem-se por z_1, z_2, \dots, z_{n-1} os numeros, comprehendidos entre x_0 e X , que separam estes intervallos, isto é, os numeros definidos pelas equações

$$z_1 = x_0 + h_1, z_2 = z_1 + h_2, \dots, X = z_{n-1} + h_n.$$

Finalmente, representem-se por x_1, x_2, \dots, x_n quaesquer numeros que pertençam respectivamente aos intervallos de x_0 a z_1 , de z_1 a z_2 , de z_2 a z_3 , etc. Posto isto, vamos demonstrar o theorema seguinte:

A somma

$$S = h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \dots + h_n f(x_n) = \Sigma h_i f(x_i)$$

tende para um limite, quando se augmenta o numero de intervallos em que se decompõe $X - x_0$,

de modo que todas as quantidades h_1, h_2, \dots, h_n tendam para zero, e este limite é sempre o mesmo, qualquer que seja o modo como se escolham os números z_1, z_2 , etc., e os números x_1, x_2 , etc.

Seja $X > x_0$ e supponhamos primeiramente que se escolhem os números x_1, x_2 , etc. de modo que $f(x_1), f(x_2)$, etc. representem os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varia respectivamente de x_0 a z_1 , de z_1 a z_2 , etc. Decompondo o intervalo h_i em m intervallos parciaes h'_i, h''_i , etc., o que dá

$$h_i = h'_i + h''_i + \dots,$$

e chamando x'_i, x''_i , etc. os valores de x a que correspondem os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varia desde z_{i-1} até $z_{i-1} + h'_i$, de $z_{i-1} + h'_i$ até $z_{i-1} + h'_i + h''_i$, etc., temos

$$f(x'_i) \geq f(x_i), f(x''_i) \geq f(x_i), \text{ etc.},$$

e portanto

$$h_i f(x_i) = h'_i f(x_i) + h''_i f(x_i) + \dots > h'_i f(x'_i) + h''_i f(x''_i) + \dots$$

O primeiro membro d'esta desigualdade representando uma qualquer das parcelas de S e o segundo membro a somma das que a substituem quando se divide h_i em m partes, podemos concluir que a somma S diminue, quando augmenta o numero de partes em que se divide o intervallo h_i . Por outra parte, o seu valor conserva-se sempre maior do que

$$m(h_1 + h_2 + \dots + h_n) = m(X - x_0),$$

representando por m o menor valor que toma $f(x)$, quando x varia desde x_0 até X . Logo a somma S tende para um limite, quando as quantidades h_1, h_2 , etc. tendem todas para zero.

Supponhamos agora que $f(x_1), f(x_2)$, etc. não representam os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varia respectivamente de x_0 a z_1 , de z_1 a z_2 , etc., e sejam M_1, M_2, M_3 , etc. estes valores. Pondo

$$f(x_1) = M_1 + \varepsilon_1, f(x_2) = M_2 + \varepsilon_2, \dots,$$

temos

$$\Sigma h_i f(x_i) = \Sigma h_i M_i + \Sigma h_i \varepsilon_i,$$

ou, chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|$, etc.,

$$|\Sigma h_i f(x_i) - \Sigma h_i M_i| = |\Sigma h_i \varepsilon_i| \leq \Sigma h_i |\varepsilon_i| < \varepsilon \Sigma h_i.$$

Mas, por ser continua a função $f(x)$ em todos os pontos desde x_0 até X , a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponde um numero η , tal que as desigualdades $|\varepsilon_1| < \delta$, $|\varepsilon_2| < \delta$, etc. são satisfeitas quando a h_1, h_2 , etc. se dão valores inferiores a η ⁽¹⁾. Logo, quando h_1, h_2 , etc. tendem para zero, ε tende para zero. Por isto e por ser Σh_i igual a $X - x_0$, conclue-se da desigualdade precedente que as duas sommas $\Sigma h_i f(x_i)$ e $\Sigma h_i M_i$ tendem para um mesmo limite.

Resta demonstrar que este limite é sempre o mesmo, qualquer que seja o modo como se escolham os numeros z_1, z_2 , etc. Para isso, consideremos duas sommas S e S_1 , correspondentes a dois modos de divisão do intervallo $X - x_0$, e seja S_2 uma somma correspondente a um terceiro modo de divisão, em que figurem todos os intervallos das duas divisões anteriores. O intervallo h_i da primeira divisão conterá um ou mais intervallos h'_i, h''_i , etc. da terceira divisão, e á parcella $h_i f(x_i)$ da somma S corresponderão as parcellas

$$h'_i f(x'_i), h''_i f(x''_i), \dots$$

da somma S_2 . Pondo pois

$$f(x_i) = f(x'_i) + \varepsilon_i, f(x_i) = f(x''_i) + \varepsilon'_i, \dots, \\ u_i = h'_i f(x'_i) + h''_i f(x''_i) + \dots,$$

temos

$$S_2 = \Sigma u_i = \Sigma f(x_i) (h'_i + h''_i + \dots) - \Sigma (\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots) \\ = \Sigma f(x_i) h_i - \Sigma (\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots),$$

d'onde se tira

$$|S_2 - S| = |\Sigma (\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots)| < \varepsilon \Sigma h_i,$$

chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \dots, |\varepsilon'_1|, |\varepsilon'_2|, \dots$, etc.

Mas, por ser continua a função $f(x)$, ε tende para zero, quando h_1, h_2 , etc. tendem para zero; logo S e S_2 tendem para um mesmo limite.

Demonstra-se do mesmo modo que S_1 e S_2 tendem tambem para um mesmo limite.

Logo S e S_1 tendem para um mesmo limite, que é o que se queria demonstrar.

No que precede suppozemos $X > x_0$. Se for porém $X < x_0$, o theorema subsiste, porque, como as quantidades h_1, h_2 , etc. são n'este caso negativas, $-S$ tende para um limite determinado, e portanto S tende para um limite igual áquelle em valor absoluto mas de signal contrario.

(1) Este facto, consequencia do theorema 4.º do n.º 37, foi considerado durante muito tempo como evidente.

I. No caso de $f(x)$ ser positiva no intervallo de x_0 a X e de ser $X > x_0$, todas as parcelas de S são também positivas, e o limite para que tende esta somma, quando h_1, h_2 , etc. tendem para zero, representa, por definição, a área do segmento plano limitado pela curva cuja equação é $y = f(x)$, pelo eixo das abscissas e por duas paralelas ao eixo das ordenadas, tiradas pelos pontos cujas abscissas são eguaes a x_0 e X . Esta definição concorda com a que foi dada no n.º 58-II, visto que as sommas (A) e (B), consideradas no referido paragrapho, correspondem a dois modos particulares de escolher os valores de z_1, z_2 , etc., que entram na expressão de S ; tem todavia uma fórmula mais geral. Acrescentaremos ainda que no n.º 58 se admittiu como postulado a existencia do limite das sommas mencionadas, e que este facto está agora demonstrado.

81. O limite para que tende a somma S , quando todas as quantidades h_1, h_2 , etc. tendem para zero, é uma função de X , que representaremos por $F(X)$. Procuremos a derivada d'esta função.

Se mudarmos em $F(X)$ a variavel X em $X + h$ e se chamarmos k o augmento correspondente d'esta função, temos

$$k = \lim [h_{n+1} f(x_{n+1}) + \dots + h_{n+t} f(x_{n+t})],$$

onde é

$$h_{n+1} + h_{n+2} + \dots + h_{n+t} = h.$$

Representando por $f(x'')$ e $f(x')$ o menor e o maior dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde X até $X + h$, vê-se que o valor de k está comprehendido entre

$$f(x') (h_{n+1} + \dots + h_{n+t}) = f(x') h$$

e

$$f(x'') (h_{n+1} + \dots + h_{n+t}) = f(x'') h.$$

Logo, se $h > 0$, temos

$$h f(x'') < k < h f(x'),$$

e portanto

$$f(x'') < \frac{k}{h} < f(x');$$

e, se $h < 0$,

$$f(x') < \frac{k}{h} < f(x'').$$

Fazendo agora tender h para zero, x' e x'' tendem para X e, por ser continua a função $f(x)$, $f(x')$ e $f(x'')$ tendem para $f(X)$; temos portanto

$$\lim \frac{h}{h} = f(X).$$

Logo a função $F(X)$ admite derivada no ponto X , e esta derivada é igual a $f(X)$.

A demonstração que se deu d'este theorema no n.º 53-III é a representação geometrica da que vem de expôr-se

82. Derivada dos arcos de curva ⁽¹⁾. — Dá-se o nome de *comprimento de um arco de curva* ao limite para que tendem os perimetros dos polygonos inscriptos n'este arco, quando todos os lados tendem para zero.

Para justificar esta definição, é necessario demonstrar que este limite existe e que tem um valor unico, qualquer que seja a lei de inscripção dos polygonos.

Supponhamos que as coordenadas dos pontos da curva considerada são determinadas pelas equações $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $z = \pi(t)$, dando diversos valores á variavel independente t , e que a cada valor dado a t corresponde um unico ponto.

Em um arco desta curva, comprehendido entre os pontos (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z) , correspondentes aos valores t_0 e t da variavel independente, inscrevamos um polygono qualquer, e sejam (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , etc. os seus vertices e t_1, t_2 , etc. os valores de t a que correspondem. O perimetro P do polygono será dado pela fórmula

$$P = \Sigma \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2},$$

onde a somma representada por Σ se refere a todos os lados do polygono, a qual, representando por t'_i , t''_i e t'''_i tres valores de t , comprehendidos entre t_i e t_{i+1} , por h_i a differença $t_{i+1} - t_i$ e attendendo ás egualdades (n.º 64)

$$x_{i+1} - x_i = h_i \varphi'(t'_i), \quad y_{i+1} - y_i = h_i \phi'(t''_i), \quad z_{i+1} - z_i = h_i \pi'(t'''_i),$$

se reduz á seguinte:

$$P = \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t'_i)]^2 + [\phi'(t''_i)]^2 + [\pi'(t'''_i)]^2}.$$

Ponha-se agora

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sqrt{[\varphi'(t'_i)]^2 + [\phi'(t''_i)]^2 + [\pi'(t'''_i)]^2} \\ &\quad - \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\phi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2} \end{aligned}$$

(1) Foi Newton quem primeiro applicou a analyse infinitesimal á rectificação das curvas. Antes d'isso poucas curvas tinham sido rectificadas.

e represente-se por ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, etc. Teremos

$$P = \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2} + \Sigma \varepsilon_i h_i,$$

d'onde resulta

$$|P - \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2}| = |\Sigma \varepsilon_i h_i| < \varepsilon \Sigma h_i.$$

Mas a expressão de ε_i pode ser reduzida á fórmula

$$\varepsilon_i = \frac{[\varphi'(t'_i)]^2 + [\psi'(t'_i)]^2 + [\pi'(t'_i)]^2 - \{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2\}}{\sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2} + \sqrt{[\varphi'(t'_i)]^2 + [\psi'(t'_i)]^2 + [\pi'(t'_i)]^2}},$$

e portanto temos, representando por m o menor valor que toma $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\pi'(t)]^2}$ nos pontos do arco considerado e suppondo que este valor é diferente de zero,

$$|\varepsilon_i| < \frac{1}{m} \{[\varphi'(t'_i)]^2 - [\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t'_i)]^2 - [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t'_i)]^2 - [\pi'(t_i)]^2\}.$$

Suppondo agora que $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ e $\pi'(t)$ são funções continuas de t em todos os pontos do arco considerado, a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponde um numero η , tal que é

$$|[\varphi'(t'_i)] - [\varphi'(t_i)]| < \delta, \quad |[\psi'(t'_i)] - [\psi'(t_i)]| < \delta, \quad |[\pi'(t'_i)] - [\pi'(t_i)]| < \delta,$$

quando h_1, h_2, \dots , são menores do que η .

Logo temos $|\varepsilon_i| < \delta$, qualquer que seja i , e portanto também $\varepsilon < \delta$; o que mostra que ε tende para zero, quando h_1, h_2, \dots tendem para zero, e portanto que é

$$\lim [P - \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2}] = 0.$$

Esta fórmula mostra, em virtude dos theoremas demonstrados nos numeros precedentes, que o limite de P existe; que é unico, qualquer que seja o modo como as quantidades h_1, h_2 , etc. tendam para zero; e, finalmente, que a derivada d'este limite, que representaremos por s , é dada pela fórmula

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

onde o radical deve ser tomado com o signal $+$ quando s e t variam no mesmo sentido (n.º 63), e com o signal $-$ no caso contrario.

Da igualdade precedente deduz-se a expressão da diferencial de s :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

I. *O limite da razão do comprimento de um arco para o da sua corda é igual á unidade.*

Sejam l e c os comprimentos do arco e da corda correspondente, e t e $t+dt$ os valores que toma a variavel t nas suas extremidades. Temos, representando por t_1 , t_2 e t_3 tres numeros comprehendidos entre t e $t+dt$ (n.º 63).

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{[\varphi(t+dt) - \varphi(t)]^2 + [\psi(t+dt) - \psi(t)]^2 + [\pi(t+dt) - \pi(t)]^2} \\ &= dt \sqrt{[\varphi'(t_1)]^2 + [\psi'(t_2)]^2 + [\pi'(t_3)]^2}. \end{aligned}$$

Por outra parte, como l representa o augmento que recebe o comprimento do arco s , contado a partir de uma origem fixa, quando se muda t em $t+dt$, temos (n.º 56) $\lim \frac{l}{ds} = 1$. Logo

$$\lim \frac{l}{c} = \lim \frac{l}{ds} \lim \frac{ds}{c} = \lim \frac{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\pi'(t)]^2}}{\sqrt{[\varphi'(t_1)]^2 + [\psi'(t_2)]^2 + [\pi'(t_3)]^2}}$$

Basta agora attender a que t_1 , t_2 e t_3 tendem para t , quando dt tende para zero, e admittir que as funcções $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ e $\pi'(t)$ são continuas no ponto t , para concluir que $\lim \frac{l}{c} = 1$.

II. Se a curva dada for plana, a expressão de ds reduz-se á seguinte:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se quizermos o valor de ds expresso em coordenadas polares, faremos a transformação da fórmula precedente por meio das relações

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & dx &= d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta, \\ y &= \rho \sin \theta, & dy &= d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

e acharemos

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

VIII

Mudança das variáveis

83. O problema que vamos resolver é o seguinte:

Dada uma expressão analytica ou uma equação, em que entrem variáveis independentes, variáveis dependentes e derivadas d'estas, achar a sua transformada, quando se substituem todas ou algumas das variáveis por outras, ligadas com as primeiras por equações dadas.

Esta transformação é empregada em Geometria, quando, tendo um resultado expresso em um systema de coordenadas, se quer exprimi-lo n'outro systema. Em Analyse tem tambem uma importancia grande, como iremos vendo.

84. Consideremos primeiramente expressões em que entrem duas variáveis, uma dependente e outra independente:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right),$$

e resolvamos os dois problemas seguintes:

1.º Substituir a variavel independente x por outra θ , ligada com x pela relação $\varphi(x, \theta) = 0$.

Chamando x' , x'' , etc., y' , y'' , etc. as derivadas de x e de y relativamente a θ , teremos (n.º 61-IV)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} x', & y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} x'^2 + \frac{dy}{dx} x'', \\ y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} x'^3 + 3 \frac{d^2y}{dx^2} x' x'' + \frac{dy}{dx} x''', \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

e portanto

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, & \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'^2 y''' - x' y' x''' - 3x' x'' y'' + 3y' x''^2}{x'^5}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

onde se devem substituir as derivadas de x pelos seus valores tirados da equação $\varphi(x, \theta) = 0$.

Substituindo depois os valores de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., obtidos d'este modo, na expressão proposta, resolve-se o problema enunciado.

EXEMPLO. — Substituindo na expressão

$$F\left(x, \sqrt{x^2 + bx + c}, \frac{dy}{dx}\right),$$

onde F representa uma função racional de x , $\sqrt{x^2 + bx + c}$ e $\frac{dy}{dx}$, a variavel x por outra θ , ligada com x pela equação

$$\sqrt{x^2 + bx + c} = x - \theta,$$

que dá

$$x = \frac{\theta^2 - c}{b + 2\theta}, \quad x' = \frac{2(\theta^2 + b\theta + c)}{(b + 2\theta)^2},$$

vem uma expressão da fórma

$$f\left(\theta, \frac{dy}{d\theta}\right),$$

onde f representa uma função racional de θ e $\frac{dy}{d\theta}$. Temos assim um exemplo da transformação de uma função irracional n'outra racional.

2.º *Substituir as variaveis x e y por outras ρ e θ , ligadas com x e y pelas equações*

$$\varphi(x, y, \theta, \rho) = 0, \quad \psi(x, y, \theta, \rho) = 0,$$

sendo θ a nova variavel independente.

Para resolver este problema basta derivar as equações precedentes relativamente a θ , considerando x , y e ρ como funcções d'esta variavel, o que dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= 0, \\ \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

e em seguida substituir nas fórmulas (1) os valores de x' , y' , x'' , y'' , etc., tirados das equações precedentes. Obtêm-se assim os valores das derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

EXEMPLO. — Transformar a expressão

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

sendo

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

as equações que ligam as novas variáveis às antigas.

Temos

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta, \quad y' = \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta,$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta - \rho \cos \theta,$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta.$$

Substituindo estes valores de x' , y' , x'' , etc. na fórmula

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' y'' - y' x''},$$

que resulta de substituir na expressão dada $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ pelos seus valores, tirados das fórmulas (1), vem

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2}}.$$

85. Consideremos agora, a respeito da função de duas variáveis independentes

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots\right),$$

as duas questões seguintes:

1.º *Substituir as variáveis independentes x e y por outras θ_1 e θ_2 , ligadas com aquellas pelas equações*

$$\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0, \quad \psi(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0.$$

Por z ser função de x e y , e por x e y serem funções de θ_1 e θ_2 , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_1} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Substituindo n'estas equações as derivadas $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x}{\partial \theta_2}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_2}, \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$, etc. pelos seus valores, tirados das equações que resultam de derivar $\varphi=0$ e $\psi=0$ relativamente a θ_1 e θ_2 , e resolvendo-as depois relativamente a $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., temos os valores d'estas derivadas, em função de θ_1 e θ_2 , que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

2.º *Substituir as variáveis x, y e z por outras θ_1, θ_2 e ρ , ligadas com as primeiras pelas equações*

$$\varphi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0, \quad \psi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0, \quad \omega(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0.$$

Resolve-se este problema por meio das fórmulas anteriores, substituindo n'ellas $\frac{\partial z}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \frac{\partial z}{\partial \theta_2}$, etc. pelos seus valores, tirados das equações $\varphi=0, \psi=0, \omega=0$.

EXEMPLO. — Transformar a função

$$F \left(x, \sqrt{a+x}, \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}}{y} \right),$$

suppondo as novas variáveis ligadas com as antigas pelas equações

$$x^2 + y^2 = \theta_1, \quad a + x = \theta_2.$$

Derivando estas equações relativamente a θ_1 e θ_2 , vem

$$2x \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + 2y \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = 1, \quad x \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2;$$

U

o que dá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y}, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{2x\theta_2}{y}.$$

Temos pois

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_2} = 2\theta_2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x\theta_2}{y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Substituindo na expressão proposta os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ tirados d'estas equações, vem uma expressão da fórmula

$$f\left(\theta_2, \frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right),$$

em que só entra uma derivada e em que não entra radical ⁽¹⁾.

(1) As fórmulas para a mudança da variavel independente, no caso das funções de uma variavel, foram dadas pela primeira vez no *Traité des infiniment petits* de L'Hospital. Os outros problemas de que vimos de nos occupar n'este numero e no precedente foram considerados por Euler nas suas *Institutiones calculi differentialis*.

CAPITULO III

Aplicações geometricas dos principios precedentes

I

Curvas planas

86. *Tangentes e normaes.* — I. Seja $F(x, y) = 0$ a equação de uma curva dada, referida a coordenadas rectangulares. A *tangente* a esta curva no ponto (x, y) passa por este ponto e o seu coeﬃciente angular é igual a $\frac{dy}{dx}$ (n.º 58-I); logo a equação d'esta recta é (representando por X e Y as coordenadas dos seus postos)

$$(1) \quad Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x),$$

ou, substituindo $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva,

$$\frac{\partial F}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y - y) = 0.$$

II. A recta perpendicular á tangente, tirada pelo ponto de contacto, diz-se *normal á curva* n'este ponto, e a sua equação é

$$X - x = -\frac{dy}{dx} (Y - y)$$

o

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

*

A respeito da normal resolveremos aqui o problema seguinte:

Determinar o limite para que tende a intersecção das normaes á curva nos pontos (x, y) e $x+h, y+k$, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

As equações das duas normaes são

$$X - x = -f'(x) (Y - y),$$

$$X - x - h = -f'(x+h) (Y - y - k),$$

e a segunda dá, attendendo á primeira e á relação (n.º 55)

$$f'(x+h) = f'(x) + h[f''(x) + \varepsilon],$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h ,

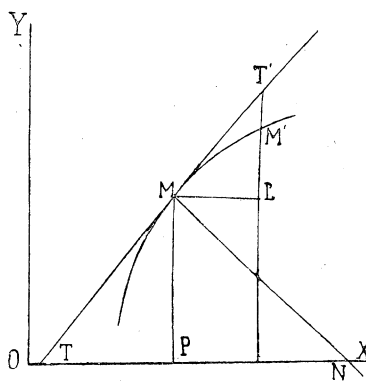
$$h = h[f''(x) + \varepsilon] (Y - y - k) - k f'(x).$$

Temos portanto, dividindo por h e depois fazendo tender h para zero, as fórmulas

$$(2) \quad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad X - x = -y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

que determinam as coordenados (X, Y) do ponto pedido.

III. Dão-se respectivamente os nomes de *subtangente*, *subnormal*, *comprimento da tan-*



gente e *comprimento da normal* aos segmentos de recta TP, PN, TM e NM, determinados

pela tangente e pela normal. A resolução dos triângulos MTP e MNP dá, para determinar o valor d'estes segmentos, as fórmulas seguintes (θ representando o angulo MTX):

$$\text{subtangente} = \frac{y}{\text{tang } \theta} = y \frac{dx}{dy},$$

$$\text{subnormal} = y \text{ tang } \theta = y \frac{dy}{dx},$$

$$\text{tangente} = \sqrt{y^2 + \text{TP}^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$\text{normal} = \sqrt{y^2 + \text{NP}^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Faz-se muito uso d'estas expressões para construir as tangentes e as normaes ás curvas.

IV. O angulo ω da recta OM, que une a origem das coordenadas a um ponto M da curva, e da tangente MT á curva n'este ponto é dado pela fórmula

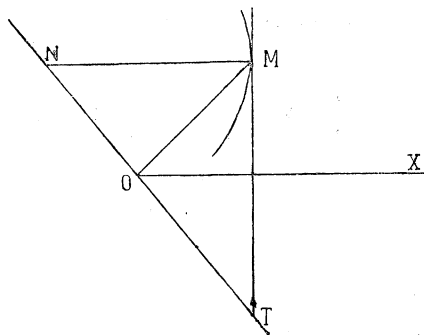
$$\text{tang } \omega = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} y'} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy},$$

visto que y' e $\frac{y}{x}$ são os valores dos coefficients angulares das duas rectas.

Em coordenadas polares temos, pondo $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

$$\text{tang } \omega = \frac{\rho d\theta}{d\rho}.$$

Tirando pela origem O das coordenadas uma recta NT, perpendicular a OM, e traçando



a tangente MT e a normal MN á curva no ponto M, formam-se dois triângulos rectangulos,

cujos lados OT, ON, MT e MN são conhecidos pelos nomes de *subtangente polar*, *subnormal polar*, *tangente polar* e *normal polar*.

Resolvendo os triangulos considerados e notando que $\angle OMT = \omega$ e $OM = \rho$, obtêm-se as fórmulas

$$\begin{aligned} \text{subt.} &= \rho \tan \omega = \frac{\rho^2 d\theta}{d\rho}, & \text{subn.} &= \rho \cot \omega = \frac{d\rho}{d\theta}, \\ \text{tang.} &= \rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}, & \text{norm.} &= \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}. \end{aligned}$$

V. A equação da tangente dá-se muitas vezes, principalmente no caso das curvas algebraicas, uma forma que vamos ver.

É evidente que, mudando na equação da curva x e y em $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$, podemos representar a curva proposta pelas equações

$$F(x, y, z) = 0, \quad z = 1,$$

$F(x, y, z)$ representando uma função homogenea de x, y e z . A equação da tangente pôde também ser escripta debaixo da forma

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

onde $Z = z = 1$.

Temos porém (n.º 70)

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z = n F(x, y, z) = 0.$$

Logo podemos dar á equação da tangente a forma

$$(A) \quad \frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y + \frac{\partial F}{\partial z}Z = 0,$$

onde, depois de formar as derivadas, se deve pôr $Z = z = 1$.

VI. A theoria das tangentes e das normaes ás curvas dá logar a muitos problemas importantes; mencionaremos aqui os seguintes:

1.º *Por um ponto (a, b) , exterior a uma curva dada, tirar tangentes a esta curva.*

Para resolver este problema, temos de eliminar x e y entre a equação da curva e a equação

$$\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial y} b + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

que exprime que as tangentes passam pelo ponto dado. Os systemas de valores que estas equações dão para x e y , são as coordenadas dos pontos de contacto.

Considerando x e y como variaveis, a ultima equação representa uma curva, que passa pelos pontos de contacto da curva dada com as tangentes tiradas pelo ponto (a, b) . A esta curva chama-se *polar* do ponto (a, b) relativamente á curva dada.

Se a curva proposta for algebrica de ordem n , a sua polar é tambem algebrica de ordem $n-1$, visto que as derivadas de $F(x, y, z)$ relativamente a x , y e z são do grau $n-1$. N'este caso, estas duas curvas não podem cortar-se em mais do que $n(n-1)$ pontos; e portanto *por um ponto exterior a uma curva algebrica não se podem tirar mais do que $n(n-1)$ tangentes a esta curva*⁽¹⁾.

2.º *Achar a condição para que a recta*

$$AX + BY + CZ = 0, \quad Z = 1,$$

seja tangente a uma curva dada.

Para que a recta representada por esta equação coincida com a recta representada pela equação (A), é necessario e sufficiente que seja

$$\frac{\partial F}{\partial x} : A = \frac{\partial F}{\partial y} : B = \frac{\partial F}{\partial z} : C.$$

Eliminando pois x e y entre estas equações e a equação $F(x, y) = 0$ da curva, obtem-se a equação de condição para que a recta dada seja tangente á curva. Se esta equação for satisfeita, as duas equações anteriores dão depois a coordenadas x e y dos pontos de contacto.

3.º *Tirar as tangentes communs a duas curvas dadas.*

Sejam $F(x, y, z) = 0$, $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$ as equações das curvas dadas. A equação geral das tangentes á primeira é dada pela fórmula (A). Basta pois procurar a condição para que esta equação coincida com a equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} Z = 0,$$

(1) A respeito do caso em que o ponto está sobre a curva pode ver-se um artigo que publicámos em *L'Enseignement mathématique* (Genève, tom. VII).

para resolver o problema. Temos assim as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial z_1},$$

que, juntamente com as equações das curvas dadas, determinam as coordenadas x, y, x_1, y_1 dos pontos de contacto da tangente com as duas curvas.

4.º *Tirar uma normal a uma curva dada por um ponto exterior* (a, b).

A condição para que a normal passe pelo ponto (a, b) é

$$\frac{a-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{b-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Por meio d'esta equação e da proposta obtêm-se as coordenadas (x, y) dos pontos em que as rectas pedidas são normaes á curva.

Se a proposta for uma curva algebraica de ordem n , a equação anterior é tambem do grau n , e vê-se por isso que o *numero das normaes que se podem tirar a uma curva por um ponto exterior não póde ser superior a n^2* .

5.º *Procurar o logar geometrico dos pés das perpendiculares ás tangentes a uma curva dada, tiradas por um ponto fixo.*

Tomando este ponto para origem das coordenadas, obtem-se a equação da curva procurada eliminando x e y entre a equação da curva dada e as seguintes:

$$Y - y = y'(X - x), \quad y'Y + X = 0,$$

que representam a tangente e a perpendicular a esta recta, tirada pela origem das coordenadas. A curva que vem de definir-se chama-se *pedaria* da curva dada.

87. Fócos das curvas. — Generalizando a noção de *fóco*, dada na theoria das conicas, Plücker (1) deu este nome aos pontos do plano de uma curva pelos quaes se lhe podem tirar duas tangentes cujos coefficients angulares sejam eguaes a $+i$ e $-i$, i representando $\sqrt{-1}$.

Para obter estas tangentes, determine-se a constante C , que entra na equação

$$Y \pm iX + C = 0,$$

por meio da que resulta de eliminar x e y entre a equação da curva dada e as seguintes (n.º 86-VI, 2.º):

$$F'_x(x, y, z) : \pm i = F'_y(x, y, z) : 1 = F'_z(x, y, z) : C.$$

(1) *Jornal de Crelle*, tom. x, 1833.

Obtidas assim as equações das tangentes que têm para coefficiente angular $+i$ e $-i$, basta procurar os pontos em que as primeiras cortam as segundas, para determinar os focos da curva dada.

Consideremos, por exemplo, a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 z^2 = 0.$$

Temos

$$\pm \frac{b^2 x}{i} = a^2 y = -\frac{a^2 b^2}{C},$$

e, eliminando x e y entre estas equações e a da curva, $C^2 = b^2 - a^2$.

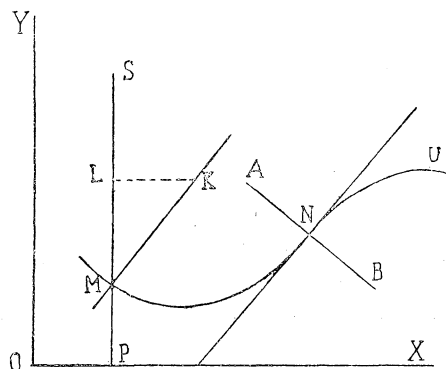
Logo as equações das tangentes pedidas são

$$Y = i[X \pm \sqrt{a^2 - b^2}], \quad Y = -i[X \pm \sqrt{a^2 - b^2}],$$

e as duas primeiras cortam as duas ultimas em quatro pontos, dois reaes e dois imaginarios, que são os focos da curva considerada. As coordenadas dos primeiros são $(0, \pm \sqrt{a^2 - b^2})$, o que concorda com o que se viu na theoria das conicas.

A noção geral de *fóco*, que vimos de dar, tem uma grande importancia na theoria das curvas algebricas.

§§. *Concavidade e convexidade.* — Consideremos um arco de curva e pelo ponto $M(x, y)$ d'este arco tiremos a normal MK , que se estende indefinidamente em duas direcções oppostas. Se as normaes nos pontos do arco, visinhos de M e situados de ambos os lados d'este ponto,



cortarem todas a normal MK em pontos situados n'uma mesma direcção, diz-se que o arco considerado tem, na vizinhança do ponto M , a sua *concavidade* voltada no sentido MK e a sua *convexidade* voltada no sentido opposto.

O sentido da concavidade determina-se pois pela posição do ponto (X, Y) , dado pelas fór-

mulas (2), visto que estas fórmulas dão o ponto para que tendem as intersecções da normal á curva no ponto (x, y) com as normaes nos pontos visinhos, quando estes pontos tendem para (x, y) .

Diz-se que um arco tem, na vizinhança do ponto M, a sua concavidade voltada no sentido MS, quando esta direcção fórma um angulo agudo com a direcção MK da normal, no sentido da qual está voltada a concavidade.

Se a direcção dada é a das ordenadas positivas, para que esta direcção forme um angulo agudo com a direcção da normal que contem o ponto (X, Y) , deve este ponto estar evidentemente acima de uma parallela ao eixo das abscissas, tirada pelo ponto (x, y) , e portanto deve ser $Y > y$. A primeira das fórmulas (2) mostra que isto tem logar todas as vezes que y'' é positivo.

Vê-se do mesmo modo que a concavidade está voltada no sentido das ordenadas negativas quando y'' é negativo.

Podemos pois enunciar o theorema seguinte:

A curva volta a sua concavidade no sentido das ordenadas positivas ou das negativas, na vizinhança de um ponto dado, no qual as derivadas y' e y'' são finitas, segundo a derivada y'' é positiva ou negativa n'este ponto.

I. Se nos pontos visinhos do ponto N, collocados de um dos lados d'este ponto, a concavidade está voltada n'um sentido NA e nos pontos visinhos, collocados do outro lado, está voltada no sentido opposto NB, diz-se que N é um *ponto de inflexão*.

D'esta definição e do theorema anterior resulta immediatamente o theorema seguinte:

É condição necessaria e sufficiente para que um ponto (x, y) , no qual as derivadas y' e y'' são finitas, seja ponto de inflexão, que y'' mude n'este ponto de signal.

Funda-se n'este theorema a indagação dos pontos de inflexão, como adiante veremos⁽¹⁾.

89. Asymptotas. — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de uma curva, se a distancia de um ponto do ramo da curva á recta tende para zero, quando o ponto se affasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptotas não parallelas ao eixo das ordenadas dos ramos das curvas planas, basta determinar as constantes a e b , que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas y e Y da recta e da curva, correspondentes á

(1) A determinação dos pontos de inflexão das curvas planas é um dos problemas a que os inventores do calculo infinitesimal applicaram a sua descoberta. Anteriormente tinha sido o referido problema methodicamente estudado por Sluse na 2.^a edição do seu *Mesolabium*, publicado em 1668, e tinham sido obtidos, por processos particulares, por Huygens, Descartes, etc. os pontos de inflexão de algumas curvas especiaes notaveis.

mesma abscissa, tenda para zero, quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que seja

$$Y = ax + b + v,$$

representando por v uma função de x que tenda para zero, quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$,

$$\lim z = \lim \frac{Y}{x} = a + \lim \frac{b + v}{x} = a,$$

$$\lim u = \lim (Y - ax) = b + \lim v = b;$$

e vê-se portanto que, para determinar a , basta substituir Y por zx na equação proposta e procurar depois o limite para que tende z , quando x tende para o infinito; e que, para determinar b , basta substituir Y por $ax + u$ na equação proposta e procurar depois o limite para que tende u , quando x tende para o infinito. Devemos observar que é necessario e sufficiente para que o ramo da curva do qual a recta que vimos de achar é asymptota, seja real, que sejam reaes os valores pelos quaes passa u , quando tende para b .

A equação de qualquer asymptota parallelá ao eixo das ordenadas é $x = a$, onde a representa evidentemente o limite para que tende a abscissa do ramo da curva considerado, quando y tende para o infinito ⁽¹⁾.

EXEMPLOS. 1.º Appliquemos primeiramente este methodo á equação

$$y^2 = 2kx + mx^2,$$

que representa todas as conicas.

Pondo, para isso, $y = zx$, vem

$$z^2 - m - 2kx^{-1} = 0,$$

e portanto, fazendo tender x para $\pm \infty$,

$$a = \lim z = \pm \sqrt{m}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \sqrt{mx} + u$, vem a equação

$$\pm 2\sqrt{m}u - 2k + u^2x^{-1} = 0,$$

(1) A origem da theoria das asymptotas encontra-se na *Enumeratio linearum tertii ordinis* de Newton, publicada em 1706. Foi continuada por Stirling e Nicole, em trabalhos consagrados á demonstração dos resultados enunciados n'esta obra celebre, e depois por De Gua na obra intitulada *Usage de l'Analyse de Descartes* (1740), por Euler na sua *Introductio in Analysin infinitorum*, já mencionada, por Cramer na sua notavel *Introduction à l'Analyse des lignes courbes* (1750), etc.

que determina uma função u de x^{-1} , que tende para $\pm \frac{k}{\sqrt{m}}$ (além de outra que tende para o infinito), quando x^{-1} tende para zero.

Logo as equações das asymptotas pedidas são

$$y = \pm \sqrt{m} \left(x + \frac{k}{m} \right),$$

e são reaes quando $m > 0$, isto é, no caso de hyperbole, imaginarias quando $m < 0$, isto é, no caso da ellipse, e estão situados no infinito quando $m = 0$, isto é, no caso da parabola.

2.º A equação

$$y = x \pm \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

dá, pondo $y = zx$ e depois $x = \pm \infty$, $\lim z = 1$, e, pondo $y = x + u$ e $x = \pm \infty$, $\lim u = \pm 1$; logo a curva correspondente admitte as asymptotas

$$y = x + 1, \quad y = x - 1.$$

Quando x tende para 0, y tende para $\pm \infty$; logo a recta $x = 0$ é tambem asymptota da curva.

3.º Consideremos finalmente a equação

$$hxy^2 + kxy + ly^2 + my = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que pode representar todas as *cubicas*, escolhendo-se convenientemente os eixos das coordenadas.

Pondo primeiramente na equação dada $y = zx$, vem

$$hz^2 - a + (lz^2 + kz - b)x^{-1} + (mz - c)x^{-2} - dx^{-3} = 0,$$

e portanto, fazendo $x = \pm \infty$,

$$hz^2 - a = 0.$$

Pondo depois na mesma equação

$$y = \sqrt{\frac{a}{h}} x + u$$

e ordenando segundo as potencias de x^{-1} , vem um resultado da fórma

$$2\sqrt{ah}u - b + k\sqrt{\frac{a}{h}} + \frac{la}{h} + Mx^{-1} + Nx^{-2} = 0,$$

que, para $x = \pm \infty$, dá

$$2\sqrt{ah}u - b + k\sqrt{\frac{a}{h}} + \frac{la}{h} = 0.$$

As rectas representadas pelas equações

$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{h}} \left(x + \frac{bh - la}{2ah} \right) - \frac{k}{2h}$$

são pois asymptotas da curva; e estas asymptotas são reaes quando a e h têm o mesmo signal, imaginarias no caso contrario, e as suas distancias á origem tendem para o infinito, quando h tende para zero.

Escrevendo a equação proposta debaixo da fórma

$$hx + l + (kx + m)y^{-1} = (ax^3 + bx^2 + cx + d)y^{-2}$$

e, pondo $y = \infty$, vê-se que a curva tem uma terceira asymptota, parallela ao eixo das ordenadas, cuja equação é

$$hx + l = 0,$$

quando h e l não são simultaneamente nulos, e que a distancia d'esta asymptota á origem tende para o infinito, quando h tende para zero.

Se é ao mesmo tempo $h = 0$ e $l = 0$, a equação da curva reduz-se á seguinte:

$$kx + m = (ax^3 + bx^2 + cx + d)y^{-1},$$

e vê-se que ainda existe uma asymptota parallela ao eixo das ordenadas, cuja equação é

$$kx + m = 0,$$

e que a distancia d'esta asymptota á origem tende para o infinito, quando k tende para zero.

I. Supponhamos que na equação da tangente

$$Y = y'X + y - xy'$$

a um ramo infinito de uma curva, no ponto (x, y) , os parametros y' e $y - xy'$ tendem para os parametros a e b de uma recta $Y = aX + b$, quando x tende para o infinito. N'este caso a recta $Y = aX + b$ é asymptota da curva.

Para demonstrar este theorema, basta mostrar que $\frac{y}{x}$ e $y - ax$ tendem respectivamente para a e b , quando x tende para ∞ .

Como y' e $y - xy'$ tendem para a e b , quando x tende para ∞ , vê-se immediatamente que $\frac{y - xy'}{x}$ tende para 0, e portanto que $\frac{y}{x}$ tende para a .

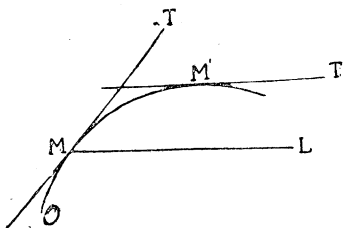
Em segundo logar temos, pondo $x = t^{-1}$ e $y = f(x)$, applicando o theorema 3.º do n.º 64 á função $f(t^{-1})t - a$, pondo para isso no referido theorema $x_0 = 0$, $h = t$ e notando que esta função é nulla quando $t = 0$ (por ser egual a $x^{-1}y - a$),

$$\begin{aligned} \lim_{x=\infty} (y - ax) &= \lim_{t=0} \frac{f(t^{-1})t - a}{t} = \lim_{t=0} \{ f[(\theta t)^{-1}] - f'[(\theta t)^{-1}](\theta t)^{-1} \} \\ &= \lim_{t=0} [f(t^{-1}) - f'(t^{-1})t^{-1}] = \lim_{x=\infty} (y - xy') = b. \end{aligned}$$

90. Curvatura. — Chama-se *curvatura média de um arco de curva*, comprehendido entre os pontos M e M', a razão entre o angulo formado pelas tangentes MT e M'T' á curva nas extremidades do arco e o comprimento do arco.

Chama-se *curvatura da curva no ponto M* o limite para que tende a razão precedente, quando o arco tende para zero.

Sejam $y = f(x)$ a equação da curva em coordenadas rectangulares, θ o angulo das tan-



gentes nas extremidades do arco e l o comprimento do arco; a curvatura da curva no ponto M será egual a $\lim \frac{\theta}{l}$, e vamos determiná-la em função das coordenadas do ponto.

Representemos por ω o angulo formado pela tangente á curva n'este ponto com o eixo das abscissas e por s o comprimento do arco comprehendido entre uma origem fixa O, a partir da qual se contam os arcos, e o ponto M. Por ser egual a θ o valor absoluto do augmento, positivo ou negativo, que recebe o angulo que fórma a tangente com o eixo das abscissas,

quando se passa do ponto M para M', isto é, quando se muda s em $s + l$, temos, em virtude da definição de derivada,

$$curvatura = \lim \frac{\theta}{l} = \pm \frac{d\omega}{ds}.$$

Obtida esta primeira expressão da curvatura, vamos deduzir d'ella uma outra, em função das coordenadas (x, y) do ponto M. Para isso, basta derivar a equação $y' = \tan \omega$ relativamente a x , o que dá

$$y'' = (1 + y'^2) \frac{d\omega}{dx};$$

e substituir na expressão precedente $d\omega$ e ds pelos seus valores, dados por esta equação e pela equação $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, o que dá

$$(3) \quad curvatura = \frac{1}{R}, \quad R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm \frac{N^3}{y^3 y''},$$

onde N representa (n.º 86-III) o comprimento da normal, e onde se deve empregar o signal a que corresponde um valor positivo de R, pois que se considera a curvatura como uma quantidade essencialmente positiva.

I. Applicando a fórmula precedente á circumferencia $x^2 + y^2 = r^2$, vem $R = r$; e portanto a curvatura da circumferencia é constante inversa do seu raio.

Se pelo ponto (x, y) da curva dada fizermos passar uma circumferencia, cujo centro esteja sobre a normal á curva n'este ponto, do lado para onde ella volta a concavidade, e cujo raio seja igual a R, esta circumferencia é tangente á curva e tem em toda a sua extensão a mesma curvatura que a curva considerada tem no ponto (x, y) . Ao circulo assim obtido dá-se o nome de *circulo de curvatura da curva* no ponto (x, y) . É facil obter as coordenadas (x_1, y_1) do centro d'este circulo, que se chama *centro de curvatura*.

Com effeito, por passar este circulo pelo ponto (x, y) e por ser o seu raio igual a R, tem s

$$(4) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2};$$

e, por estar o seu centro sobre a normal á curva no ponto (x, y) , temos

$$(5) \quad x_1 - x = -y'(y_1 - y).$$

Eliminando x_1 e y_1 entre estas equações, obtêm-se as fórmulas

$$x_1 = x \mp y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y \pm \frac{1 + y'^2}{y''},$$

que dão as coordenadas não só do centro de curvatura, collocado do lado para onde a curva volta a concavidade, mas também as do centro do circulo tangente á curva no ponto (x, y) e igual ao de curvatura, collocado do lado para onde ella volta a concavidade. Para distinguir quaes dos signaes das fórmulas precedentes correspondem ao centro de curvatura, basta comparal-as com as fórmulas (2) do n.º 86, que determinam um ponto (X, Y) para o qual está voltada a concavidade da curva. Vê-se assim que as coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas fórmulas

$$(6) \quad x_1 = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

D'esta comparação conclue-se também, attendendo ao que se disse no n.º 86-II, que o centro de curvatura da curva no ponto (x, y) é o limite para que tende a intersecção da normal á curva no ponto considerado com a normal n'um ponto infinitamente proximo, quando o segundo tende para o primeiro.

II. Se, em logar da variavel independente x , quizermos empregar outra variavel t , ligada com x por uma relação dada, transformaremos as fórmulas (3) e (6) por meio das fórmulas (1) do n.º 84, e teremos

$$x_1 = x + \frac{y' (x'^2 + y'^2)}{y' x'' - x' y''}, \quad y_1 = y - \frac{x' (x'^2 + y'^2)}{y' x'' - x' y''}, \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y' x'' - x' y''},$$

onde x' e y' representam agora as derivadas de x e y relativamente a t . A expressão de R em coordenadas polares foi dada no n.º 84.

III. A cada ponto (x, y) da curva proposta corresponde um centro de curvatura. Quando o ponto (x, y) descreve esta curva, o centro de curvatura descreve outra, cuja equação se acha eliminando x e y entre as equações (6) e a equação proposta. A esta ultima curva dá se o nome de *evoluta* da curva dada, e a esta o nome de *evolvente* d'aquella. A respeito da relação entre a *evoluta* e a *evolvente* demonstraremos as duas proposições importantes seguintes:

1.ª *A normal a uma curva dada no ponto (x, y) é tangente á sua evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente.*

Com effeito, differenciando as equações (6), vem

$$dx_1 = dx - (1 + y'^2) dx - y' d \frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$dy_1 = y' dx + d \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

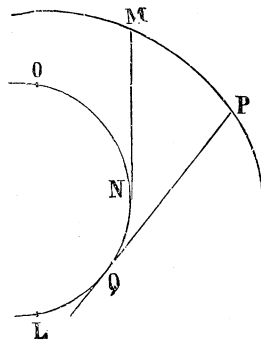
Multiplicando a segunda d'estas equações por y' e sommando o resultado com a primeira, obtem-se a equação

$$(7) \quad y' \frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0,$$

que, por ser y' o coeficiente angular da tangente á curva proposta no ponto (x, y) e $\frac{dy_1}{dx_1}$ o coeficiente angular da tangente á evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente, mostra que estas duas rectas são perpendiculares.

2.^a *A differença entre os raios de curvatura correspondentes a dois pontos de uma curva dada é igual ao comprimento do arco da evoluta comprehendido entre os seus respectivos centros de curvatura, quando entre os dois pontos o raio de curvatura cresce ou decresce sempre.*

Seja MP um arco da curva considerada, NQ o arco correspondente da evoluta e O um



ponto fixo, a partir do qual se contam os comprimentos dos arcos da evoluta. Chamando s_1 o comprimento do arco OQ, teremos

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2.$$

Differenciando a equação (4) e attendendo á equação (5), vem

$$(x - x_1) dx_1 + (y - y_1) dy_1 = -R dR.$$

A equação (7) dá tambem, eliminando y' por meio de (5),

$$(x - x_1) dy_1 - (y - y_1) dx_1 = 0.$$

Elevando ao quadrado os dois membros das equações precedentes e sommando, vem

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Temos pois

$$\frac{ds}{dx} = \pm \frac{dR}{dx},$$

x

onde se deve empregar o signal $+$ ou $-$, segundo R e s_1 variam no mesmo sentido ou em sentido contrario no intervallo considerado (n.º 63).

No primeiro caso temos (n.º 64, th. 3.º-2.º), C representando uma constante,

$$s_1 = R + C,$$

e, do mesmo modo, chamando R_0 o raio MN e s_0 o comprimento do arco ON ,

$$s_0 = R_0 + C;$$

e portanto

$$s_1 - s_0 = R - R_0.$$

No segundo caso (o da figura quando se toma o ponto L para origem dos arcos) vem do mesmo modo

$$s_0 - s_1 = R - R_0.$$

Resulta d'esta proposição que, se collocarmos sobre PQ um fio flexivel e inextensivel e o enrolarmos sobre QNO , fixando uma extremidade em Q e conservando-o sempre tenso, a outra extremidade P descreve uma evolvente de QNO . Esta propriedade das evolutas foi aproveitada por Huygens para construir um pendulo que descreva uma curva dada qualquer; e foi mesmo esta questão de Mecanica que levou aquelle grande geometra á invenção da theoria que vem de ser considerada, da qual se occupou no seu admiravel tratado *De horelogio oscillatorio*, publicado em 1673, onde lhe consagrou um capitulo que é uma obra prima de geometria pura ⁽¹⁾.

91. EXEMPLOS ⁽²⁾. I. Consideremos primeiro a parabola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

1) A equação da tangente no ponto (x, y) é

$$y(Y - y) = p(X - x).$$

⁽¹⁾ A definição que Huygens deu de evoluta, é independente da consideração do circulo de curvatura. A noção de curvatura foi dada mais tarde por Leibnitz e Newton, e foi estudada principalmente por este ultimo geometra, pelo methodo das derivadas, no seu *Methodus Fluxionum*.

⁽²⁾ Fazemos aqui applicação das doutrinas precedentes sómente ás conicas e á cycloide. Podem ver-se muitas outras applicações no nosso *Tratado de las curvas especiales notables*, publicado pela Academia das Sciencias de Madrid, onde não systematicamente estudadas as curvas mais notaveis pelas suas propriedades, pela sua historia ou pelas suas applicações.

2) As expressões da subtangente, da subnormal e da normal são

$$\text{subt} = 2x, \text{ subn} = p, \text{ norm} = N = \sqrt{2px + p^2}.$$

Resultam das duas primeiras igualdades meios faceis de construir a tangente e a normal á curva.

3) As fórmulas (3) e (6) dão as expressões do raio de curvatura e das coordenadas do centro de curvatura:

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2},$$

$$x_1 = x + \frac{p^2 + y^2}{p} = 3x + p,$$

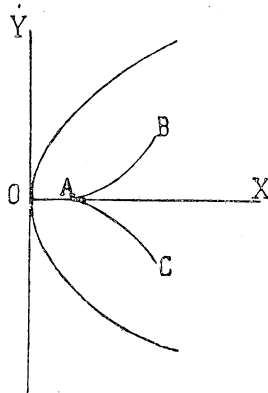
$$y_1 = y - \frac{(p^2 + y^2)y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

4) Eliminando x e y entre as duas ultimas equações e a da parabola, vem a equação da evoluta:

$$y_1^2 = \frac{8}{27p}(x_1 - p)^3,$$

que representa a curva de terceira ordem a que se dá o nome de *parabola semicubica*.

Esta equação mostra que a evoluta da parabola é formada por dois ramos, symetricamente dispostos relativamente ao eixo das abscissas, que partem do ponto A, cujas coorde-



nadas são $(p, 0)$, e se estendem indefinidamente no sentido das abscissas positivas, quando $p > 0$, ou no sentido das abscissas negativas, quando $p < 0$, afastando-se cada vez mais do

*

eixo das abscissas. A primeira das equações

$$y'_1 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8}{27p}} (x_1 - p)^{\frac{1}{2}}, \quad y''_1 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{8}{27p}} (x_1 - p)^{-\frac{1}{2}}$$

mostra que no ponto $(p, 0)$ é $y'_1 = 0$, e portanto que os dois ramos da curva são tangentes n'este ponto ao eixo das abscissas. A segunda mostra que, em cada ramo da curva, y''_1 tem um signal constante, e portanto que a curva não tem pontos de inflexão.

II. Consideremos em segundo logar a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Temos

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

e portanto:

1) A equação da tangente á curva no ponto (x, y) é

$$a^2 y (Y - y) + b^2 x (X - x) = 0$$

ou

$$a^2 y Y + b^2 x X = a^2 b^2.$$

2) A expressão do raio de curvatura no ponto (x, y) é (n.º 90)

$$R = \frac{a^2 N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2},$$

$2p$ representando o parametro.

Mudanda b em $b\sqrt{-1}$, vê-se que esta expressão de R tem também logar no caso da hyperbole. Comparando-a com a expressão do raio de curvatura da parabola, conclue-se que *em todâs as secções conicas o raio de curvatura em um ponto dado é igual ao cubo do segmento da normal comprehendido entre este ponto e o eixo que contem os fócios, dividido pelo quadrado do semiparametro.*

As coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

onde $c^2 = a^2 - b^2$.

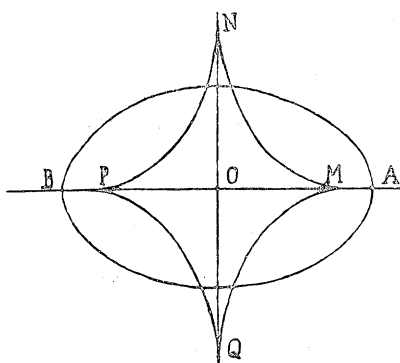
3) A equação da evoluta acha-se eliminando x e y entre as ultimas equações e a da ellipse, o que dá

$$\left(\frac{by_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ax_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Como esta equação não se altera pela mudança de x_1 em $-x_1$ e de y_1 em $-y_1$, vê-se que a curva é composta de quatro ramos eguaes, symmetricos relativamente aos eixos coordenados. Basta portanto, para conhecer a sua fôrma, discutir o ramo correspondente ás coordenadas positivas, para o que se deve attender á equação da curva e ás egualdades

$$y'_1 = -\left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y''_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{y'_1 x_1 - y_1}{x_1^2}\right).$$

1.º A curva corta o eixo das abscissas positivas no ponto $\left(+\frac{c^2}{a}, 0\right)$, e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y'_1 = 0$ quando $y_1 = 0$.



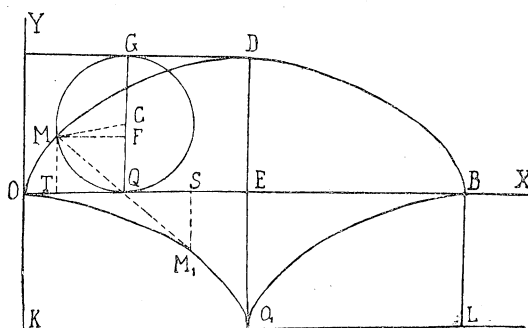
2.º Quando x_1 diminue, y_1 augmenta e a curva affasta-se do eixo das abscissas, conservando sempre a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto que y''_1 é positivo.

3.º A curva corta o eixo das ordenadas positivas no ponto $\left(0, \frac{c^2}{b}\right)$, e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y'_1 = \infty$ quando $x_1 = 0$.

4.º Quando o valor absoluto de x_1 é maior de que $\frac{c^2}{a}$, y_1 é imaginario. Logo a estes valores de x_1 não correspondem pontos da curva. Do mesmo modo aos valores de y_1 maiores do que $\frac{c^2}{b}$ não correspondem pontos da curva.

III. Chama-se *cycloide* a curva gerada pelo ponto M de uma circumferencia que rôla, sem escorregar, sobre uma recta dada OB.

D'esta definição resulta immediatamente que a curva é composta de um numero infinito de arcos eguaes a ODB, que este arco tem um eixo de symetria DE, egual ao diametro do circulo gerador, e que OB é egual ao comprimento da circumferencia do mesmo circulo.



Para achar a equação da curva, consideremos um ponto qualquer M, correspondente á posição C do centro do circulo gerador, e, tomando OB para eixo das abscissas e a perpendicular a esta recta, tirada por O, para eixo das ordenadas, exprimamos as coordenadas (x, y) do ponto M em funcção do angulo MCQ, formado por MC com a recta CQ, perpendicular a OB. Para isso, notemos que é, por definição, t representando o angulo MCQ e r o raio da circumferencia geradora,

$$OQ = \text{arco } MQ = rt;$$

e portanto

$$x = OP = OQ - PQ = r(t - \sin t),$$

$$y = MP = CQ - CF = r(1 - \cos t).$$

Estas duas equações determinam todos os pontos do arco ODB, dando a t todos os valores desde 0 até 2π , e dariam, pela eliminação de t , a equação da curva; mas vamos estudal-a sem fazer esta eliminação.

1) A equação da normal é, tomando t para variavel independente,

$$\frac{dy}{dt}(Y - y) + \frac{dx}{dt}(X - x) = 0,$$

onde

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t) = y, \quad \frac{dy}{dt} = r \sin t.$$

Para achar a sua intersecção com o eixo das abscissas, façamos $Y = 0$, o que dá

$$ry \sin t = (X - x) y,$$

e portanto

$$X = x + r \operatorname{sen} t = OP + PQ = OQ.$$

Logo a normal á cycloide n'um ponto dado M passa pelo ponto Q onde o circulo gerador correspondente toca a recta sobre que gira (Descartes).

2) O comprimento da normal é dado pela fórmula

$$N^2 = y^2 + PQ^2 = y^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t,$$

e vem portanto

$$N = r \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2r \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

3) A ultima fórmula do n.º 90-II, pondo

$$x' = r(1 - \cos t), \quad x'' = r \operatorname{sen} t, \quad y' = r \operatorname{sen} t, \quad y'' = r \cos t,$$

dá a expressão seguinte do raio de curvatura:

$$R = 2r \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2N,$$

a qual mostra que o raio de curvatura MM_1 é igual ao dobro do comprimento MQ da normal.

As coordenadas (x_1, y_1) do centro de curvatura M_1 , isto é, OS e M_1S , obtêm-se imediatamente como consequencia da egualdade dos triangulos MPQ e M_1SQ , da qual resulta

$$M_1S = MP, \quad OS = OQ + QS = OQ + PQ,$$

e portanto

$$x_1 = r(t + \operatorname{sen} t), \quad y_1 = r(-1 + \cos t).$$

Estas equações dão, pela eliminação de t , a equação da evoluta da cycloide.

4) Como t é variavel independente, podemos n'estas equações mudar t em $t + \pi$, sem alterar a natureza da curva que ellas representam, e vem

$$x_1 = r(t + \pi - \operatorname{sen} t), \quad y_1 = r(-1 - \cos t).$$

Mudando depois a origem das coordenadas para o ponto O_1 , cujas ordenadas são $(\pi r, -2r)$, isto é, mudando x_1 em $x_1 + \pi r$ e y_1 em $y_1 - 2r$, vñem as equações

$$x_1 = r(t - \operatorname{sen} t), \quad y_1 = r(1 - \cos t),$$

d'onde se conclue que a *evoluta da cycloide é outra cycloide, igual á primeira, cujo circulo gerador róla sobre uma recta KL, parallela a OB, tirada pelo ponto O₁, e cujo ponto gerador parte de O₁* (Huygens).

II

Curvas no espaço

92. Tangentes e normaes. — Consideremos a curva representada pelas equações

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

I. A *tangente* a esta curva no ponto (x, y, z) define-se, como no caso das curvas planas, como limite das posições que toma a secante que passa pelo ponto (x, y, z) e pelo ponto infinitamente proximo $(x+h, y+k, z+l)$, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

Como a secante considerada passa pelos dois pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$, as suas equações são (chamando X, Y, Z as suas coordenadas correntes)

$$Y - y = \frac{k}{h}(X - x), \quad Z - z = \frac{l}{h}(X - x);$$

e portanto as equações da tangente são

$$(2) \quad \begin{cases} Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \\ Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x). \end{cases}$$

As derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ são dadas pelas equações da curva

Substituindo nas equações

$$(A) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0,$$

$\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ pelos valores dados pelas fórmulas (2), dá-se ás equações da tangente a fórma

$$(2') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0. \end{cases}$$

II. Os cosenos dos ângulos α , β , γ formados pela tangente á curva no ponto (x, y, z) com os eixos coordenados rectangulares são dados, em virtude de fórmulas bem conhecidas da Geometria Analytica, pelas equações

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds},$$

onde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

III. Chama-se *plano normal á curva* no ponto (x, y, z) o plano que passa por este ponto perpendicularmente á tangente.

Applicando ás equações (2) as fórmulas, conhecidas de Geometria Analytica, que dão a equação do plano perpendicular a uma recta dada, vem a equação do plano normal

$$(4) \quad (X-x) dx + (Y-y) dy + (Z-z) dz = 0,$$

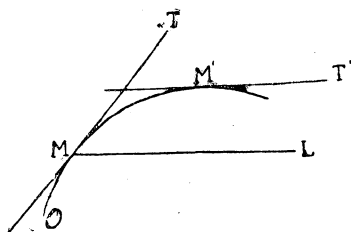
onde X , Y e Z representam as coordenadas correntes do plano.

Eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ entre esta equação e as equações (A), póde ainda dar-se á equação do plano normal a fórma

$$(4') \quad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Chama-se *normal á curva* no ponto (x, y, z) toda a recta que passa por este ponto e existe no plano normal.

IV. Chama-se *plano tangente á curva* no ponto $M(x, y, z)$ todo o plano que passa pela



tangente á curva n'este ponto. Entre estes planos vamos especialmente considerar aquelle

Y

para que tende o plano TML, que passa por esta tangente e por uma paralela á tangente á curva no ponto M', tirada pelo ponto M, quando aquelle ponto tende para este.

Tomando para variavel independente uma quantidade t , podemos representar a curva proposta pelas equações

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t), \quad z = \pi(t),$$

que determinam as cordenadas dos pontos da curva em funcção de t .

A equação geral dos planos que passam pelo ponto (x, y, z) é

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

onde A, B e C são constantes arbitrarias. Vamos determinal-as pelas condições de o plano passar pela tangente á curva no ponto (x, y, z) , cujas equações

$$\frac{X - x}{\varphi'(t)} = \frac{Y - y}{\phi'(t)} = \frac{Z - z}{\pi'(t)}$$

resultam das fórmulas (2), pondo n'ellas

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \phi'(t) dt, \quad dz = \pi'(t) dt,$$

e pela recta representada pelas equações

$$\frac{X - x}{\varphi'(t + dt)} = \frac{Y - y}{\phi'(t + dt)} = \frac{Z - z}{\pi'(t + dt)},$$

a qual passa pelo ponto (x, y, z) e é paralela á tangente á curva no ponto M', correspondente ao valor $t + dt$ da variavel independente. Estas condições são

$$A \varphi'(t) + B \phi'(t) + C \pi'(t) = 0,$$

$$A \varphi'(t + dt) + B \phi'(t + dt) + C \pi'(t + dt) = 0,$$

ou (n.º 55)

$$A \varphi'(t) + B \phi'(t) + C \pi'(t) = 0,$$

$$A \varphi''(t) + B \phi''(t) + C \pi''(t) + A \varepsilon_1 + B \varepsilon_2 + C \varepsilon_3 = 0,$$

onde ε_1 , ε_2 e ε_3 representam quantidades infinitamente pequenas com dt .

Eliminando A, B e C entre ellas e a equação do plano e fazendo tender dt para zero, vem a equação

$$\begin{vmatrix} X-a & Y-b & Z-c \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

que representa o plano procurado. A este plano dá-se o nome de *plano osculador* da curva no ponto (x, y, z) .

Desenvolvendo este determinante, póde escrever-se a equação do plano osculador do modo seguinte:

$$(5) \quad \begin{cases} (z' y'' - y' z'') (X - x) + (x' z'' - z' x'') (Y - y) \\ + (y' x'' - x' y'') (Z - z) = 0. \end{cases}$$

93. Curvatura e torsão. — Consideremos uma curva no espaço, representada como anteriormente, pelas equações:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \pi(t).$$

Se pelo ponto (x, y, z) fizermos passar uma recta de direcção determinada, dependente da posição do ponto, de modo que, chamando a, b e c os cosenos dos angulos formados por ella com os eixos coordenados, seja

$$a = f_1(t), \quad b = f_2(t), \quad c = f_3(t),$$

os cosenos a', b', c' dos angulos formados com os mesmos eixos pela recta correspondente, que passa pelo ponto $(x+h, y+k, z+l)$, serão dados (n.º 55) pelas fórmulas

$$\begin{aligned} a' &= f_1(t+dt) = f_1(t) + dt[f_1'(t) + \varepsilon_1], \\ b' &= f_2(t) + dt[f_2'(t) + \varepsilon_2], \\ c' &= f_3(t) + dt[f_3'(t) + \varepsilon_3], \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 são quantidades infinitamente pequenas com dt .

Posto isto, procuremos o limite para que tende a razão do angulo formado pelas duas rectas para o comprimento do arco λ comprehendido entre os pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

*

Chamando θ o angulo formado pelas duas rectas, temos

$$\operatorname{sen} \theta = [(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo n'esta fórmula os valores de a' , b' e c' achados precedentemente, representando para brevidade $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ por f_1 , f_2 e f_3 , e attendendo ás egualdades $\lim \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} = 1$ e (n.º 56) $\lim \frac{\lambda}{ds} = 1$, vem

$$\begin{aligned} \lim \frac{\theta}{\lambda} &= \lim \frac{\operatorname{sen} \theta}{ds} \\ &= \frac{[(f_3 f_2' - f_2 f_3')^2 + (f_1 f_3' - f_3 f_1')^2 + (f_2 f_1' - f_1 f_2')^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{dt}}. \end{aligned}$$

I. Supponhamos que as rectas dadas são as tangentes á curva nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$. Temos (n.º 92-II)

$$a = f_1(t) = \frac{x'}{s'}, \quad b = f_2(t) = \frac{y'}{s'}, \quad c = f_3(t) = \frac{z'}{s'},$$

representando por s' , x' , y' , z' as derivadas de s , x , y , z relativamente a t , e

$$f_1' = \frac{x'' s' - s'' x'}{s'^2}, \quad f_2' = \frac{y'' s' - s'' y'}{s'^2}, \quad f_3' = \frac{z'' s' - s'' z'}{s'^2},$$

onde

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Logo, chamando ω o angulo formado pelas duas tangentes consideradas, virá

$$\lim \frac{\omega}{\lambda} = \frac{[(z' y'' - y' z'')^2 + (x' z'' - z' x'')^2 + (y' x'' - x' y'')^2]^{\frac{1}{2}}}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$(6) \quad \lim \frac{\omega}{\lambda} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{s'^3},$$

pondo

$$A = z' y'' - y' z'', \quad B = x' z'' - z' x'', \quad C = y' x'' - x' y''.$$

Ao limite, dado por esta fórmula, para que tende a razão do angulo formado pelas tangentes á curva dada nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes pontos, quando o segundo ponto tende para o primeiro, dá-se o nome de *curvatura da curva no ponto* (x, y, z) ; a ω dá-se o nome de *angulo de contingencia*; e a $\lim \frac{\lambda}{\omega}$ dá-se o nome de *raio de curvatura*. Esta fórmula contem evidentemente a fórmula dada no n.º 90 para determinar a curvatura das curvas planas.

II. Supponhamos agora que as rectas dadas são as perpendiculares ao plano osculador. A equação d'este plano é (n.º 92-IV)

$$A (X - x) + B (Y - y) + C (Z - z) = 0,$$

e, em virtude de fórmulas bem conhecidas de Geometria Analytica, temos

$$a = f_1(t) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$b = f_2(t) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$c = f_3(t) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Estas fórmulas dão

$$f_3 f_2' - f_2 f_3' = \frac{CB' - BC'}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$f_1 f_3' - f_3 f_1' = \frac{AC' - CA'}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$f_2 f_1' - f_1 f_2' = \frac{BA' - AB'}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Logo, chamando τ o angulo formado pelas perpendiculares aos planos osculadores nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$, temos a fórmula

$$\lim \frac{\tau}{\lambda} = \frac{[(CB' - BC')^2 + (AC' - CA')^2 + (BA' - AB')^2]^{\frac{1}{2}}}{(A^2 + B^2 + C^2) s'}.$$

Pondo em logar de A, B, C e s' os seus valores e notando que é

$$CB' - BC' = Dx', \quad AC' - CA' = Dy', \quad BA' - AB' = Dz',$$

onde

$$D = Ax''' + By''' + Cz''' = - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

vem enfim

$$(7) \quad \lim \frac{\tau}{\lambda} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ao limite, dado pela fórmula precedente, para que tende a razão do angulo formado pelos planos osculadores nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes dois pontos, quando o segundo ponto tende para o primeiro, dá-se o nome de *torsão da curva no ponto* (x, y, z) ; ao angulo τ dá-se o nome de *angulo de torsão*; ao $\lim \frac{\lambda}{\tau}$ dá-se o nome de *raio de torsão*; e ás curvas cuja torsão é diferente de zero, isto é, ás curvas que não são planas, dá-se o nome de *curvas de dupla curvatura* ou o de *curvas enviezadas*.

III. Tomando s para variavel independente, isto é, pondo $t=s$, póde dar-se á expressão da curvatura uma forma muito simples. Substituindo, com effeito, em (6) A, B e C pelos seus valores, desenvolvendo os quadrados e attendendo ás egualdades

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2 = 1, \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

vem, substituindo no fim do calculo x'', y'', z'' por $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$,

$$(8) \quad \lim \frac{\omega}{\lambda} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

IV. EXEMPLO. Consideremos a *helice* traçada sobre o cylindro de revolução, isto é, a curva gerada por um ponto que se move sobre a superficie de um cylindro recto de base circular, de modo que a sua distancia á base seja proporcional ao comprimento do arco da base comprehendido entre um ponto fixo e o pé da generatriz do cylindro que passa pelo ponto gerador.

Tomando o centro da base para origem das coordenadas, o eixo do cylindro para eixo dos z e chamando ρ o raio da base, as equações da curva são

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t, \quad z = at,$$

a representando uma constante, e dão

$$\begin{aligned}x' &= -\rho \operatorname{sen} t, & x'' &= -\rho \cos t, & x''' &= \rho \operatorname{sen} t, \\y' &= \rho \cos t, & y'' &= -\rho \operatorname{sen} t, & y''' &= -\rho \cos t, \\z' &= a, & z'' &= 0, & z''' &= 0.\end{aligned}$$

Logo temos as fórmulas

$$\lim \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}, \quad \lim \frac{\tau}{\lambda} = \frac{a}{\rho^2 + a^2},$$

que determinam a curvatura e a torsão da helice traçada na superficie do cylindro considerado.

Vê-se por estas fórmulas que a *curvatura e a torsão da helice traçada sobre o cylindro de base circular são constantes* (⁴).

III

Superficies

94. Plano tangente. Normal. — Sejam $F(x, y, z) = 0$ a equação de uma superficie dada e $\varphi(x, y, z) = 0$ a equação de outra superficie qualquer, que passe por um ponto dado (x, y, z) , situado sobre a primeira. As duas superficies cortam-se segundo uma curva, que passa pelo ponto considerado, e resulta do que se disse no n.º 92-I que uma das equações da tangente a esta curva no ponto (x, y, z) é

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Esta equação pertence a um plano e é independente da equação $\varphi(x, y, z) = 0$; portanto

(⁴) A applicação do methodo differential ás curvas de dupla curvatura foi feita pela primeira vez por Clairault, o fundador da sua theoria geral, á qual consagrou em 1731 um livro notavel, intitulado *Traité des courbes à double courbure*, no qual se occupou das suas tangentes, da sua rectificação, da quadratura dos seus cylindros projectantes, etc. Os planos osculadores d'estas curvas foram considerados indirectamente por João Bernoulli e depois de um modo directo por Tinseau, em 1781, no tom. ix das *Mémoires des savants étrangers* da Academia das Sciencias de Paris, e a theoria da sua curvatura por Monge, em 1785, no tom. x da mesma collecção de memorias.

todas as tangentes ás curvas traçadas n'uma superfície, que passam pelo ponto (x, y, z) , estão situadas sobre um plano. A este plano dá-se o nome de *plano tangente á superfície* no ponto (x, y, z) .

Por ser, representando por p e q as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(a) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0,$$

podemos ainda dar á equação do plano tangente a forma

$$(9) \quad Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

I. Se quizermos achar os pontos da superfície considerada em que os planos tangentes são paralelos a uma recta dada $x = az$, $y = bz$, temos de procurar os pontos d'esta superfície que satisfazem á equação de condição

$$(A) \quad a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

a qual exprime que o plano tangente é paralelo á recta dada.

Esta equação e a da superfície considerada determinam uma curva Δ , em todos os pontos da qual o plano tangente á superfície é paralelo á recta dada.

Se pelos pontos da curva Δ tirarmos paralelas á recta dada, estas paralelas formam um cylindro. Como o plano tangente á superfície $F(x, y, z) = 0$ n'um ponto da curva Δ é determinado pela paralela á recta dada, que passa pelo ponto considerado, e pela tangente á curva Δ no mesmo ponto, e como o plano tangente ao cylindro no ponto referido é determinado pelas mesmas rectas (visto que ambas são tangentes a linhas que estão sobre a superfície do cylindro), vê-se que *este cylindro é tangente á superfície ao longo da curva Δ* .

Escrevendo a equação (A) debaixo da forma [para o que basta attender ás fórmulas (a)]:

$$ap + bq = 1,$$

vê-se que a equação ás derivadas parciaes das superfícies cylindricas, obtida no n.º 75, exprime que os planos tangentes a estas superfícies são todos paralelos a uma recta.

II. Os pontos de contacto da superfície $F(x, y, z) = 0$ com os planos tangentes que passam por um ponto dado (a, b, c) , são determinados por esta equação e pela seguinte:

$$(B) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - c) = 0.$$

Estes pontos formam pois uma curva Δ , e vê-se, como anteriormente se viu no caso do cylindro, que o cone formado pelas rectas que passam pelos pontos d'esta curva e pelo ponto dado, é tangente á superficie considerada em todos os pontos de Δ .

Escrevendo a equação (B) debaixo da fórma

$$z - c = p(x - a) + q(y - b),$$

vê-se que a equação ás derivadas parciaes das superficies conicas (n.º 75) exprime que os planos tangentes a estas superficies passam todos pelo vertice.

III. As expressões dos cosenos dos angulos α , β , γ que o plano tangente fórma com os planos coordenados xy , xz , e yz são, em virtude de fórmulas bem conhecidas de Geometria Analytica:

$$\cos \alpha = K \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \cos \beta = K \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \gamma = K \frac{\partial F}{\partial x},$$

onde

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

IV. Chama-se *normal á superficie* no ponto (x, y, z) a perpendicular n'este ponto ao plano tangente. As suas equações são, em virtude das condições de perpendicularidade de uma recta a um plano, dadas na Geometria Analytica,

$$(10) \quad \frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Estas equações podem ainda ser escriptas do modo seguinte:

$$(10') \quad X - x = -p(Z - z), \quad Y - y = -q(Z - z).$$

V. A condição para que a normal a uma superficie corte a recta representada pelas equações

$$X = \alpha Z + k, \quad Y = \beta Z + l,$$

z

obtem-se eliminando X , Y e Z entre estas equações e as da normal, o que dá

$$(\alpha + p)(y - l + qz) = (\beta + q)(x - k + pz).$$

Vê-se pois que a equação ás derivadas parciaes das superficies de revolução, obtida no n.º 75, exprime que as normaes a esta superficie cortam o seu eixo. Acrescentaremos ainda que é geometricamente evidente que todas as normaes a estas superficies nos pontos do mesmo paralelo encontram o seu eixo no mesmo ponto.

95. *Curvatura das secções planas das superficies.* — I. A curvatura da secção feita n'uma superficie por um plano qualquer obtem-se pela fórmula geral dada no n.º 93-I. Aqui vamos procurar as relações que existem entre as curvaturas das secções feitas pelos planos que passam por um ponto dado da superficie, considerando primeiro as secções feitas pelos planos que passam pela normal á superficie no ponto dado, e em seguida as secções obli-
quas.

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superficie. Ponhamos para brevidade

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

e representemos por p_0 , q_0 , r_0 , s_0 e t_0 os valores que tomam p , q , r , s e t no ponto dado.

Para comparar a curvatura das secções feitas n'esta superficie pelos planos normaes que passam por um ponto dado, tomemos para eixo dos z a normal á superficie no ponto dado e para plano xy o plano tangente no mesmo ponto. N'este caso a equação do plano tangente é $Z = 0$, e portanto, pondo na equação (9)

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad Z = 0,$$

vê-se que temos $p_0 = 0$ e $q_0 = 0$.

Um plano qualquer que passe pela normal, tem para equação $y = Ax$, onde A representa a tangente trigonometrica do angulo θ formado por elle com o plano xz ; e esta equação e a da superficie dão, representando por y' , z' , y'' , z'' as derivadas de y e z relativamente a x ,

$$\begin{aligned} y' &= A, \quad y'' = 0, \quad z' = p + Aq, \\ z'' &= r + 2As + A^2t, \end{aligned}$$

e portanto, quando $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$$y' = A, \quad y'' = 0, \quad z' = 0, \quad z'' = r_0 + 2As_0 + A^2t_0.$$

Substituindo estes valores na fórmula (6) do n.º 93 e pondo, a fim de tomar x para

variavel independente, $x' = 1$ e $x'' = 0$, vem a expressão seguinte da curvatura c_n da secção normal considerada:

$$(11) \quad c_n = \frac{r_0 + 2As_0 + A^2t_0}{1 + A^2},$$

convencionando considerar esta quantidade como positiva quando A satisfaz á condição $r_0 + 2As + A^2t_0 > 0$, cuja significação geometrica veremos adiante, e como negativa no caso contrario.

Derivando c_n relativamente a A , vem

$$c'_n = - \frac{2[s_0 A^2 - (t_0 - r_0)A - s_0]}{(1 + A^2)^2},$$

ou

$$c'_n = - \frac{2s_0(A - m_1)(A - m_2)}{(1 + A^2)^2},$$

onde m_1 e m_2 representam as raizes da equação

$$s_0 A^2 - (t_0 - r_0)A - s_0 = 0.$$

Vê-se pois que, quando A passa pelos valores m_1 e m_2 , c'_n muda de signal, e portanto a curvatura c_n passa (n.º 63) de crescente a decrescente ou de decrescente a crescente, isto é, passa por um valor *maximo* ou por um valor *minimo*.

De ser $m_1.m_2 = -1$ conclue-se que *as duas secções de curvatura maxima e minima são perpendiculares uma á outra*.

Tomando os planos d'estas duas secções para plano zx e zy , teremos de fazer na fórmula (11) $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$, e portanto $A = 0$ e $A = \infty$, para obter as suas curvaturas, que designaremos por c_1 e c_2 ; o que dá $c_1 = r_0$ e $c_2 = t_0$. Vem pois

$$c_n = \frac{1}{1 + A^2} c_1 + \frac{2A}{1 + A^2} s_0 + \frac{A^2}{1 + A^2} c_2.$$

Por outra parte, devendo ser uma das quantidades m_1 e m_2 igual a zero, a equação que determina os valores d'estas quantidades mostra que deve ser $s_0 = 0$. Logo

$$c_n = \frac{1}{1 + A^2} c_1 + \frac{A^2}{1 + A^2} c_2$$

ou

$$(12) \quad c_n = c_1 \cos^2 \theta + c_2 \sin^2 \theta.$$

*

Temos pois o seguinte theorema importante, publicado por Euler em 1760 nas *Memorias da Academia das Sciencias de Berlin*, com o qual este grande geometra deu principio á Geometria infinitesimal das superficies curvas:

Entre as secções feitas n'uma superficie por planos que passam por uma mesma normal, ha duas de curvaturas maxima ou minima, perpendiculares entre si; e a curvatura de qualquer d'ellas está ligada com a curvatura d'estas duas por meio da relação (12).

As secções de curvatura maxima e minima dá-se o nome de *secções principaes*.

D'este theorema deduzem-se os corollarios seguintes:

1.º *Se uma secção cuja curvatura é $c_n^{(1)}$, for perpendicular á secção cuja curvatura é c_n , temos*

$$c_n + c_n^{(1)} = c_1 + c_2.$$

Deduz-se este resultado sommando com a egualdade (12) a egualdade

$$c_n^{(1)} = c_1 \sin^2 \theta + c_2 \cos^2 \theta.$$

2.º *Se for $c_1 = c_2$, será a curvatura c_n constante, qualquer que seja o plano secante. Aos pontos da superficie onde isto tem logar, dá-se o nome de pontos umbilicaes.*

II. Para conhecer o sentido em que as secções planas que vimos de considerar, voltam a sua concavidade, na visinhança do ponto da superficie considerado, basta notar que, por ser

$$z_0'' = r_0 + 2As_0 + A^2t_0 = r_0 + A^2t_0,$$

a concavidade da secção normal que faz com o plano zx um angulo θ , está voltada (n.º 88) no sentido dos z positivos, quando é $r_0 + A^2t_0 > 0$, e no sentido dos z negativos, quando é $r_0 + A^2t_0 < 0$.

Logo, se r_0 e t_0 têm o mesmo signal, todas estas secções têm a sua concavidade voltada no mesmo sentido. Se r_0 e t_0 têm signaes contrarios, os dois valores de A dados pela egualdade $r_0 + A^2t_0 = 0$, determinam dois planos, que separam as secções cuja concavidade está voltada no sentido em que z é positivo d'aquellas cuja concavidade está voltada no sentido em que z é negativo. No primeiro caso a superficie está toda do mesmo lado do plano tangente, na visinhança do ponto de contacto; no segundo caso a superficie corta o plano tangente na visinhança d'este ponto.

III. Continuemos a suppôr a superficie proposta referida ao plano tangente e aos planos das secções principaes, como planos coordenados, e comparemol-a com a superficie de segunda ordem cuja equação, referida aos mesmos planos coordenados, é

$$Z = \frac{r_0}{2} X^2 + \frac{t_0}{2} Y^2,$$

a qual passa pela origem das coordenadas, onde é tangente á superficie dada.

Por ser $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = 0$, os planos das secções principaes d'esta ultima superficie, relativos ao ponto $(0, 0, 0)$, coincidem com os planos zx e zy , isto é, com os planos das secções principaes da superficie dada; e por ser $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = r_0$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = t_0$, as secções feitas nas duas superficies por um mesmo plano normal no ponto considerado têm a mesma curvatura n'este ponto e, na sua visinhança, a concavidade voltada no mesmo sentido.

Se cortarmos esta superficie por planos perpendiculares á normal considerada, obtêm-se curvas de segunda ordem, cujas equações são

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = 2\alpha, \quad Z = \alpha,$$

semelhantes á curva representada pelas equações

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = 1, \quad Z = 0.$$

A esta ultima curva chama-se a *indicatriz* da superficie $z = f(x, y)$ no ponto $(0, 0, 0)$.

Se r_0 e t_0 têm o mesmo signal, a superficie de segunda ordem considerada é um *paraboloides elliptico* e a indicatriz é uma ellipse. Se r_0 e t_0 têm signaes contrarios, a superficie de segunda ordem considerada é um *paraboloides hyperbolico* e a indicatriz é uma hyperbole. No primeiro caso, os planos perpendiculares á normal á superficie $z = f(x, y)$ cortam a superficie de segunda ordem segundo ellipses reaes ou imaginarias. No segundo caso, estes planos cortam a superficie de segunda ordem segundo hyperboles, e as hyperboles correspondentes a dois planos equidistantes do ponto $(0, 0, 0)$ considerado são conjugadas. Todas esta hyperboles têm as mesmas asymptotas, cujas equações são

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = 0, \quad Z = 0.$$

O plano tangente á superficie no ponto $(0, 0, 0)$ corta o paraboloides hyperbolico segundo estas rectas.

No caso de ser $r_0 = 0$ ou $t_0 = 0$, a indicatriz reduz-se a duas rectas parallelas e a superficie a um cylindro.

A indicatriz dá uma representação geometrica notavel dos raios de curvatura das secções normaes que passam por um mesmo ponto da superficie dada.

Referindo-a, com effeito, a coordenadas polares, pondo $X = \rho \cos \theta$, $Y = \rho \sin \theta$, vem

$$\frac{1}{\rho^2} = r_0 \cos^2 \theta + t_0 \sin^2 \theta = c_1 \cos^2 \theta + c_2 \sin^2 \theta,$$

e portanto $c_n = \rho^{-2}$. Logo o raio de curvatura de cada secção normal póde ser representado geometricamente pelo quadrado do raio da indicatriz pelo qual passa a secção considerada.

A consideração da indicatriz, que tanta luz dá á theoria da curvatura das secções normaes das superficies, é devida a Dupin, que lhe consagrou algumas paginas dos seus notaveis *Développements de Géométrie*, publicados em 1813.

IV. Consideremos agora uma secção feita na superficie considerada por um plano que passe pelo ponto (x, y, z) , mas não contenha a normal á superficie n'este ponto.

Tomando para plano xy o plano tangente á superficie no ponto dado, para eixo dos x a intersecção do plano considerado com o plano tangente e para eixo dos z a normal, a equação do plano dado é

$$y = z \operatorname{tang} i = Bz,$$

chamando i o angulo formado por este plano com o plano normal zx . Teremos pois, em virtude d'esta equação e da equação da superficie, que supomos referida aos mesmos eixos, tomando x para variavel independente,

$$\begin{aligned} y' &= Bz', \quad y'' = Bz'', \quad z' = p + qy', \\ z'' &= r + 2s y' + ty'^2 + qy'', \end{aligned}$$

ou, pondo $x=0$, $y=0$, $z=0$ e notando que p_0 e q_0 são nulos,

$$x' = 1, \quad x'' = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = Br_0, \quad z' = 0, \quad z'' = r_0.$$

Logo a curvatura c_0 da secção obliqua será (n.º 93-I) dada pela fórmula

$$c_0 = r_0 (1 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0}{\cos i}.$$

Por outra parte a fórmula (11), pondo $\theta=0$ ou $A=0$, dá o valor r_0 para a curvatura c_n da secção feita na superficie pelo plano zx ; logo temos

$$c_0 = \frac{c_n}{\cos i}.$$

Esta relação tão simples entre a curvatura de qualquer secção obliqua e a da secção normal que passa pela mesma tangente foi descoberta por Meusnier, que a publicou em 1785 nas *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des sciences de Paris*.

IV

Curvas e superficies envolventes

96. *Curvas envolventes.* — Consideremos a familia de curvas cuja equação é

$$(1) \quad f(x, y, a) = 0,$$

onde a representa um parametro arbitrario.

Chama-se *envolvente* das curvas representadas por esta equação o logar geometrico dos pontos para que tendem as intersecções de cada uma d'ellas com uma outra, quando o valor do parametro correspondente a esta tende para o que corresponde áquella. As curvas representadas pela equação (1) chamam-se *envolvidas*.

Para achar a equação da envolvente, consideremos as duas curvas

$$f(x, y, a) = 0, \quad f(x, y, a + h) = 0,$$

correspondentes a dois valores do parametro.

Por ser (n.º 55)

$$f(x, y, a + h) = f(x, y, a) + h \left(\frac{\partial f}{\partial a} + \varepsilon \right),$$

ε representando uma quantidade que tende para zero, quando h tende para zero, as duas equações anteriores podem ser substituidas pelas equações

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} + \varepsilon = 0,$$

quando se procuram os pontos em que as curvas correspondentes ás primeiras se cortam. Quando h tende para zero, estes pontos tendem pois, em geral, para os pontos em que se cortam as curvas representadas pelas equações

$$(2) \quad f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0,$$

as quaes determinam por isso pontos da envolvente.

Eliminando a entre estas equações, obtem-se o logar geometrico d'estes pontos, isto é, a equação da envolvente das curvas dadas.

A theoria geral das curvas envolventes foi considerada pela primeira vez por Leibnitz em um trabalho publicado no volume correspondente a 1694 das *Acta eruditorum* de Leipzig. Anteriormente tinham porém já sido consideradas por Huygens as envolventes das normaes ás curvas, as quaes, como vamos ver em seguida, coincidem com as suas evolutas.

I. THEOREMA. *A tangente á envolvente em um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando a primeira das equações (2), considerando a como função de x e y dada pela segunda, vem a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} y' \right) = 0,$$

que determina o coefficiente angular y' da tangente á envolvente no ponto (x, y) . Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, esta equação reduz-se á seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

que coincide com a que determina o coefficiente angular da tangente á envolvida que passa pelo ponto considerado. Logo as duas tangentes coincidem.

Convem observar que, para se poder tirar esta conclusão, é necessario excluir os pontos cujas coordenadas annullam simultaneamente $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

97. APPLICAÇÕES. — I. Para fazer a primeira applicação da doutrina precedente, procuremos a envolvente das normaes á curva cujas coordenadas são dadas pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, em função da variavel independente t .

A equação da normal é

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0,$$

x' e y' representando as derivadas de x e y relativamente a t .

Temos pois de procurar a envolvente das rectas representadas por esta equação, considerando t como parametro arbitrario.

Derivando para isso a equação precedente relativamente a t , vem

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' = x'^2 + y'^2.$$

Temos pois

$$X - x = \frac{y' (x'^2 + y'^2)}{y' x'' - x' y''}, \quad Y - y = -\frac{x' (x'^2 + y'^2)}{y' x'' - x' y''}.$$

Estas equações determinam as coordenadas X e Y dos pontos da envolvente pedida em função de variável independente t , e mostram que esta envolvente coincide (n.º 90-II) com a evoluta da curva dada; o que concorda com o que se disse no fim do n.º 90-I.

II. Como segunda applicação, procuremos a envolvente das ellipses representadas pelas equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{a}{a} + \frac{\beta}{b} = 1,$$

onde a e b representam constantes dadas.

Temos de derivar estas equações relativamente a α , considerando β como função de α , determinada pela segunda, o que dá

$$-\frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{y^2}{\beta^3} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

e de eliminar α , β e $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre estas equações e as equações dadas.

Para fazer esta eliminação, basta notar que as ultimas equações dão

$$\frac{by^2}{\beta^3} = \frac{ax^2}{\alpha^3}$$

e portanto, pondo $ax^2 = \lambda \alpha^3$,

$$y^2 = \frac{\beta^3 \lambda}{b}, \quad x^2 = \frac{\alpha^3 \lambda}{a}.$$

Substituindo estes valores de x^2 e y^2 na equação da ellipse e attendendo á segunda equação dada, vê-se que temos $\lambda = 1$, e portanto

$$\alpha = (ax^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = (by^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Basta apenas substituir estes valores na equação que liga α com β , para obter a equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

que representa a evoluta de uma ellipse (n.º 91-II).

AA

III. Procuremos finalmente a envolvente C_1 das polares dos pontos de uma curva dada C , cujas equações são $x_1 = \varphi(t)$ e $y_1 = \phi(t)$, relativamente a uma conica tambem dada, cuja equação podemos suppôr reduzida á fôrma

$$y = kx^2 + ly^2.$$

Por ser (n.º 86-VI)

$$2kxx_1 + (2ly - 1)y_1 - y = 0$$

a equação da polar do ponto (x_1, y_1) , obtem-se a equação da curva pedida eliminando o parametro t entre esta equação e a sua derivada relativamente a t

$$2kxx'_1 + (2ly - 1)y'_1 = 0.$$

Eliminando $2ly - 1$ entre estas duas equações, obtem-se a seguinte:

$$2k(x_1 y'_1 - y_1 x'_1)x - y'_1 y = 0,$$

que, conjunctamente com a anterior, determinam as coordenadas (x, y) da curva procurada C_1 em função da variavel independente t . A esta curva C_1 chama-se *polar* de C relativamente á conica dada.

Vamos agora mostrar que, reciprocamente, a curva C é a polar de C_1 relativamente á mesma conica.

Para isso notemos que é condição necessaria e sufficiente para que a tangente á curva C , isto é, a recta representada pela equação

$$(Y - y_1)x'_1 = (X - x_1)y'_1,$$

seja a polar de um ponto (x_2, y_2) relativamente á conica, que esta equação coincida com a d'esta polar, isto é, com a equação

$$(2ly_2 - 1)Y + 2kx_2X - y_2 = 0.$$

Escrevendo a primeira equação do modo seguinte:

$$x'_1 Y - y'_1 X + x_1 y'_1 - y_1 x'_1 = 0,$$

vê-se que as condições para esta coincidência são

$$2k(x_1 y'_1 - y_1 x'_1)x_2 - y'_1 y_2 = 0, \quad 2kx_2 x'_1 + (2ly_2 - 1)y'_1 = 0.$$

Comparando estas equações com as que determinam a envolvente C_1 , precedentemente achadas, vê-se que coincidem quando $x=x_2$ e $y=y_2$. Logo a curva formada pelos pontos cujas polares, relativas á cónica, coincidem com as tangentes a C , é C_1 ; e portanto C é a envolvente das polares dos pontos de C_1 . Por este motivo as curvas C e C_1 dizem-se *polares reciprocas* uma da outra relativamente á cónica.

98. Consideremos a recta representada pela equação

$$ux + vy + w = 0,$$

onde u , v e w representam parametros, um dos quaes póde ser considerado como igual á unidade, e supponhamos que entre estes parametros existe a relação homogenea

$$F(u, v, w) = 0.$$

A envolvente das posições que toma esta recta, quando o parametro independente varia, é uma curva tangente á recta em todas as suas posições e da qual, porisso, esta ultima egualdade se diz a *equação tangencial*. Como toda a curva é a envolvente das suas tangentes, toda a curva tem uma equação tangencial.

Seja $f(x, y, z) = 0$ a equação homogenea de uma curva dada, referida a coordenadas cartesianas. Para obter a sua equação tangencial, basta exprimir as condições para que a recta precedentemente considerada coincida com a tangente a esta curva, o que dá (n.º 86-VI)

$$f'_x(x, y, z) : u = f'_y(x, y, z) : v = f'_z(x, y, z) : w,$$

e eliminar x e y entre estas equações.

A equação tangencial de uma curva é algebrica, quando a equação cartesiana o é, e reciprocamente. N'este caso, o grau da equação tangencial é igual ao numero de tangentes á curva que se podem tirar por um ponto qualquer do seu plano, não situado sobre ella.

Para o ver, basta notar que, sendo (x_1, y_1) as coordenadas d'este ponto, a condição para que a recta representada pela equação

$$ux + vy + w = 0$$

passa por elle, é

$$ux_1 + vy_1 + w = 0;$$

que os systemas de valores de u e v que satisfazem a esta ultima equação e á equação tangencial da curva dada determinam as tangentes consideradas; e que o numero d'estes systemas é igual ao grau d'esta equação.

*

Foi Plücker quem primeiro mostrou a conveniencia de considerar simultaneamente, no estudo das curvas algebraicas, as equações cartesianas e tangenciaes, como se póde ver nas suas importantes obras: *System der analytischen Geometrie*, publicada em 1835, e *Theorie der algebraischen curven*, publicada em 1839.

99. Se uma curva for dada pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, para obter a sua equação tangencial, basta exprimir as condições para que as rectas

$$uX + vY + w = 0, \quad (Y - y)x' = (X - x)y'$$

coincidam; o que dá

$$(A) \quad \frac{x'}{v} = -\frac{y'}{u} = \frac{xy' - yx'}{w},$$

e eliminar t entre estas equações.

I. A equação da polar reciproca da curva considerada relativamente ao circulo imaginario

$$x_1^2 + y_1^2 + k^2 = 0$$

obtem-se eliminando t entre a equação da polar do ponto (x, y) relativamente a este circulo,

$$xx_1 + yy_1 + k^2 = 0,$$

e a sua derivada relativamente a t ,

$$x_1 x' + y_1 y' = 0.$$

Estas equações podem ser substituidas pelas seguintes:

$$\frac{x'}{y_1} = -\frac{y'}{x_1} = \frac{xy' - yx'}{k^2},$$

que coincidem com as equações (A), quando se põe

$$\frac{x_1}{k^2} = \frac{u}{w}, \quad \frac{y_1}{k^2} = \frac{v}{w}.$$

Logo a equação que resulta de mudar na equação tangencial da curva dada $\frac{u}{w}$ em $\frac{x_1}{k^2}$ e $\frac{v}{w}$ em $\frac{y_1}{k^2}$ coincide com a equação cartesiana da polar d'esta curva relativamente ao circulo considerado.

100. No caso de ser dada uma família de curvas não existentes no mesmo plano

$$(1') \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad F(x, y, z, a) = 0,$$

a analogia com o que se disse no n.º 96 leva a chamar-se envolvente d'estas curvas a curva cujas equações se obtêm eliminando a entre as seguintes:

$$(2') \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0,$$

se só tres d'estas equações forem distintas.

THEOREMA. *A tangente á envolvente n'um ponto é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x as duas primeiras equações (2'), considerando a como função de x, y e z dada pela terceira, vêem as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial F}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right) &= 0, \end{aligned}$$

que determinam os coefficients $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ que entram nas equações da tangente á envolvente (n.º 92) no ponto (x, y) . Mas por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} &= 0, \end{aligned}$$

que são as que determinam os coefficients das equações da tangente á envolvida que passa pelo ponto considerado. Logo as duas tangentes coincidem.

Esta conclusão não tem logar quando são simultaneamente nullas as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ ou as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$.

101. *Superfícies envolventes.* — Chama-se *superfície envolvente* das superficies representadas pela equação

$$(1) \quad f(x, y, z, a) = 0$$

o logar geometrico das linhas para que tendem as intersecções de cada uma das superficies representadas por esta equação com uma outra, quando o valor do parametro correspondente a esta tende para o que corresponde áquella. As superficies representadas pela equação (1) chamam-se *envolvidas* e as linhas para que tendem as intersecções das envolvidas chamam-se *caracteristicas*.

Vê-se como no n.º 96 que as equações

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad f(x, y, z, a + h) = 0,$$

que determinam a intersecção de duas superficies da familia considerada, podem ser substituidas pelas seguintes

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + \varepsilon = 0,$$

ε representando uma quantidade infinitamente pequena com h . Fazendo tender h para zero, temos as equações

$$(2) \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0,$$

que determinam a linha para que tende esta intersecção, quando h tende para zero, e que porisso representam uma caracteristica da superficie. Eliminando a entre estas equações, vem a equação da envolvente considerada.

A theoria das superficies envolventes foi dada por Monge na sua obra admiravel: *Application de l'Analyse à la Géométrie*, onde fez tambem d'ella bellas e importantes applicações.

I. THEOREMA. *O plano tangente á superficie envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á superficie envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x e y a primeira das equações (2), considerando a como funcção de x e y , dada pela segunda, e representando por p e q as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, temos as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot p \right) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot q + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot q \right) &= 0, \end{aligned}$$

que determinam os coefficients p e q da equação (n.º 94) do plano tangente á envolvente que passa pelo ponto (x, y) . Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot q = 0,$$

que são as que determinam os coefficients da equação do plano tangente á superficie envolvida que passa pelo ponto considerado, quando as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ não são simultaneamente nullas n'este ponto. Logo os dois planos tangentes coincidem.

II. Como as equações das características são

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0,$$

estas linhas admittem uma envolvente (n.º 100), cujas equações se obtêm eliminando a entre as seguintes:

$$(3) \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, a)}{\partial a^2} = 0.$$

A esta envolvente dá-se o nome de *aresta de reversão* da superficie.

Do theorema demonstrado no n.º 100 conclue-se que *a tangente á aresta de reversão n'um ponto qualquer é também tangente n'este ponto á característica correspondente.*

102. Aplicações. — I. Consideremos, como primeira applicação, as superficies de revolução, as quaes podem ser definidas como envoltentes de uma esphera cujo centro se move sobre uma recta dada e cujo raio varia de grandeza segundo uma lei dada. As características são n'este caso os parallelos da superficie.

Sejam

$$x = az + k, \quad y = \beta z + l$$

as equações da recta dada e (a, b, c) as coordenadas do centro da esphera. Estas coordenadas devem satisfazer ás equações

$$a = \alpha c + k, \quad b = \beta c + l,$$

e portanto á equação da esphera póde dar-se a fórma

$$(x - \alpha c - k)^2 + (y - \beta c - l)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Supponhamos agora que $c = \varphi(R)$ é a equação que traduz a lei segundo a qual o raio da esphera varia, quando o seu centro se desloca. Para achar a envolvente pedida, temos de derivar a equação d'esta superficie relativamente a R , o que dá

$$[(x - \alpha c - k)\alpha + (y - \beta c - l)\beta + z - c] \varphi'(R) = -R,$$

ou

$$(ax + \beta y + z) \varphi'(R) = [(ac + k)\alpha + (\beta c + l)\beta + c] \varphi'(R) - R.$$

Eliminando R entre esta equação e a da esphera, que se póde escrever do modo seguinte:

$$(x - k)^2 + (y - l)^2 + z^2 - 2c(ax + \beta y + z) + c^2(\alpha^2 + \beta^2 + 1) + 2c(k\alpha + l\beta) = R^2,$$

obtem-se uma equação da fôrma

$$ax + \beta y + z = \phi[(x - k)^2 + (y - l)^2 + z^2].$$

Logo toda a superficie de revolução deve satisfazer a uma equação d'esta fôrma.

A equação differencial correspondente á que precede foi dada no n.º 75-2.º, e no n.º 94-V foi dada a sua interpretação geometrica.

No caso de o eixo de revolução coincidir com o eixo dos z , temos $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 0$, $l = 0$, e portanto a equação das superficies de revolução toma a fôrma

$$z = \phi(x^2 + y^2).$$

A consideração de familias de superficies, caracterisadas pelo seu modo de geração, pelas suas equações finitas e pelas suas equações ás derivadas parciaes, é devida a Monge. Encontra-se na obra precedentemente mencionada, onde são estudadas muitas familias importantes, entre as quaes estão comprehendidas as de revolução, as cylindricas, as conicas, etc.

II. Chamam-se *superficies planificaveis* as superficies envolventes dos planos dados por uma equação em que figura um só parametro arbitrario. As characteristics são n'este caso linhas rectas.

Seja

$$(1) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

a equação do plano gerador, onde A , B , C , D representam funcções de um parametro a . Para achar a equação da superficie planificavel gerada por este plano, é necessario eliminar a entre esta equação e a sua derivada relativamente a a :

$$(2) \quad \frac{dA}{da}x + \frac{dB}{da}y + \frac{dC}{da}z + \frac{dD}{da} = 0.$$

1) As superficies planificaveis satisfazem a uma equação ás derivadas parciaes, que vamos achar.

Seja C diferente de zero. Derivando a primeira das equações precedentes relativamente a x e y e attendendo á segunda, temos as equações

$$A + C p = 0, \quad B + C q = 0,$$

que, pela eliminação de a , dão uma equação da forma

$$q = \varphi(p).$$

Derivando esta equação relativamente a x e a y , e representando por r , s e t as derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, obtêm-se as equações

$$s = \varphi'(p) r, \quad t = \varphi'(p) s,$$

d'onde se deduz

$$s^2 - rt = 0.$$

Esta equação, independente das funções de a que entram na equação do plano, é a equação ás derivadas parciais das superficies planificaveis.

2) As superficies planificaveis gozam da seguinte propriedade importante:

Nas superficies planificaveis o plano tangente n'um ponto é tambem tangente em todos os outros pontos da mesma caracteristica.

Resulta esta propriedade do theorema I do n.º 101.

3) As superficies cylindricas e conicas estão comprêhendidas na familia das superficies planificaveis. As primeiras são as envolventes das posições que toma um plano que se move parallelamente a uma recta dada, e as suas caracteristicas são rectas parallelas áquella. As segundas são as envolventes das posições que toma um plano que passa por um ponto dado, e as suas caracteristicas são rectas que passam por este ponto.

Para fazer uma applicação da equação das superficies planificaveis, vamos procurar a equação da familia das superficies conicas.

Sendo (α, β, γ) o ponto fixo por onde deve passar o plano gerador, α , β e γ devem satisfazer ás equações (1) e (2), e portanto temos as equações de condição

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0,$$

$$\frac{dA}{da} \alpha + \frac{dB}{da} \beta + \frac{dC}{da} \gamma + \frac{dD}{da} = 0.$$

BB

Eliminando D e $\frac{dD}{da}$ entre estas equações e as equações (1) e (2), temos

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0,$$

$$\frac{dA}{da}(x-\alpha) + \frac{dB}{da}(y-\beta) + \frac{dC}{da}(z-\gamma) = 0,$$

e portanto

$$A + B \frac{y-\beta}{x-\alpha} + C \frac{z-\gamma}{x-\alpha} = 0,$$

$$\frac{dA}{da} + \frac{dB}{da} \frac{y-\beta}{x-\alpha} + \frac{dC}{da} \frac{z-\gamma}{x-\alpha} = 0.$$

Eliminando a entre estas equações, vem uma equação da forma

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha} = \Psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right);$$

e vê-se porisso que todas as superficies conicas satisfazem a uma equação d'esta forma (Monge: l. c.).

4) Procuremos a superficie planificavel envolvente dos planos osculadores de uma curva dada, cujas equações são, tomando t para variavel independente,

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t), \quad z = \pi(t).$$

A equação do plano osculador é (n.º 92-IV)

$$(z'y'' - y'z'')(X-x) + (x'z'' - z'x'')(Y-y) + (y'x'' - x'y'')(Z-z) = 0,$$

e portanto a equação da superficie pedida resulta de eliminar o parametro arbitrario t entre esta equação e a sua derivada relativamente a t :

$$(z'y''' - y'z''')(X-x) + (x'z''' - z'x''')(Y-y) + (y'x''' - x'y''')(Z-z) = 0.$$

Esta eliminação não póde ser effectuada sem se especificar primeiro as funcções φ , ϕ e π .

Para achar as equações da aresta de reversão, temos de empregar, além das equações precedentes, a equação que resulta de derivar a segunda relativamente a t :

$$(z''y''' - y''z''' + z'y^{(4)} - y'z^{(4)})(X-x) \\ + (x''z''' - z''x''' + x'z^{(4)} - z'x^{(4)})(Y-y) \\ + (y''x''' - x''y''' + y'x^{(4)} - x'y^{(4)})(Z-z) = 0,$$

e de eliminar depois t entre estas tres equações. Como a estas tres equações se satisfaz pondo

$$X = x, Y = y, Z = z,$$

segue-se que a curva proposta é aresta de reversão da superficie envolvente dos seus planos osculadores.

5) Do theorema que precede conclue-se que as *tangentes a qualquer curva dada formam uma superficie planificavel*. Com effeito, vimos de vêr que existe uma superficie planificavel envolvente dos planos osculadores da curva dada, da qual ella é aresta de reversão. Logo as características d'esta superficie coincidem com as tangentes á curva dada (n.º 101-II).

6) Uma curva não póde ser aresta de reversão de duas superficies planificaveis differentes, visto que as características das duas superficies devem ser tangentes á curva considerada. Porisso, se uma superficie planificavel tem para aresta de reversão uma curva dada, coincide com a envolvente dos planos osculadores d'esta curva; e os planos tangentes áquella superficie são osculadores da sua aresta de reversão.

7) As superficies planificaveis estão comprehendidas no grupo mais geral das *superficies regradadas*, as quaes são geradas por uma recta que se move segundo uma lei qualquer.

Sejam

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

as equações de uma recta e sejam $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ funcções de um parametro arbitrario a . Estas rectas só dão origem a uma superficie planificavel quando têm envolvente, isto é, quando só são distinctas tres equações do grupo formado pelas anteriores e pelas seguintes:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0,$$

onde A', B' , etc. representam as derivadas de A, B , etc. relativamente a a . A condição para que a recta proposta gere uma superficie planificavel, quando a varia, é pois

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A' & B' & C' & D' \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

As superficies regradadas que não são planificaveis, dizem-se *empenaladas*.

CAPITULO IV

Derivadas e differenciaes de ordem qualquer

I

Formação das derivadas de ordem qualquer

103. Por meio das regras dadas no capitulo II podemos formar successivamente as derivadas y' , y'' , etc. da função $y=f(x)$. Ha porém questões em que é necessario conhecer a lei d'estas derivadas, isto é, a função de x e n que representa a derivada $y^{(n)}$; vamos porisso agora procurar esta função, considerando os mesmos casos que nos n.ºs 61 e 62, por ordem diversa.

104. *Derivadas de algumas funcções simples.* — 1) Formando as derivadas successivas da função $y=x^k$, acha-se

$$y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}, \dots;$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}.$$

2) A função $y=e^x$ dá

$$y^{(n)} = e^x.$$

3) A função $y=\log x$ dá $y'=x^{-1}$, e portanto, derivando $n-1$ vezes y' ,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n},$$

representando por $(n-1)!$ o producto $1.2.3\dots(n-1)$.

4) A função $y=\sin x$ dá

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \dots;$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

5) A função $y = \cos x$ dá do mesmo modo

$$y^{(n)} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

105. *Theoremas geraes.* — I. Seja

$$y = u_1 + u_2 + \dots + u_m,$$

onde u_1, u_2 , etc. representam funções de x . Temos

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \dots + u_m^{(n)}.$$

NOTA. — A derivada de ordem n da somma

$$y = \sum_{k=0}^m A_k x^k$$

é

$$y^{(n)} = \sum_{k=n}^m A_k k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}.$$

Fazendo $x=0$ e representando por $y_0^{(n)}$ o valor correspondente da derivada $y^{(n)}$, vem o resultado

$$y_0^{(n)} = A_n n!.$$

II. Procuremos a derivada de ordem n do producto $y = u_1 u_2$ de duas funções dadas. Temos

$$\begin{aligned} y' &= u_1' u_2 + u_1 u_2', \\ y'' &= u_1'' u_2 + 2u_1' u_2' + u_1 u_2'', \\ y''' &= u_1''' u_2 + 3u_1'' u_2' + 3u_1' u_2'' + u_1 u_2''', \\ &\dots \end{aligned}$$

Observa-se n'estas egualdades que os coefficients numericos coincidem com os que apparecem nos desenvolvimentos das potencias $1.^a, 2.^a, 3.^a$, etc. do binomio $u_1 + u_2$, e que os indices superiores coincidem com os expoentes de u_1 e u_2 nos mesmos desenvolvimentos.

Somos pois levados, por indução, a escrever a fórmula

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} u_2 + \dots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i-1)} + \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \dots + u_1 u_2^{(n)}$$

ou

$$(1) \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)},$$

representando por $\binom{n}{i}$ o numero de combinações de n letras tomadas a i a i .

Para demonstrar esta fórmula, basta provar que, se é verdadeira para o indice n , tambem é verdadeira para o indice $n+1$. Para isso derivemos os dois membros d'esta egualdade, o que dá

$$y^{(n+1)} = u_1^{(n+1)} u_2 + \dots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} + \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \dots + u_1 u_2^{(n+1)}$$

ou

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)},$$

por ser

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

A fórmula (1), devida a Leibnitz⁽¹⁾, póde ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2)^n,$$

significando esta egualdade que se deve desenvolver $(u_1 + u_2)^n$ pela fórmula do binomio e substituir no resultado os expoentes por indices de derivação.

Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y = u_1 u_2 \dots u_m$$

temos *symbolicamente*

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2 + \dots + u_m)^n = \sum \frac{n! u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \dots u_m^{(i_m)}}{i_1! i_2! \dots i_m!},$$

(1) Vej. *Opera omnia*, Genevae, 1748, tom. III, pag. 421.

em que Σ se refere a todas as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = n,$$

e onde se deve considerar $0!$ como representando a unidade.

Deduz-se esta fórmula da anterior por um processo analogo ao que se emprega em Algebra para passar da lei do desenvolvimento do binomio para a lei do desenvolvimento dos polynomios.

III. Consideremos agora a função $y = \frac{u_1}{u_2}$. Temos

$$u_1 = y u_2,$$

$$u_1' = y' u_2 + y u_2',$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_1^{(n)} = y^{(n)} u_2 + \dots + \binom{n}{i} y^{(n-i)} u_2^{(i)} + \dots + y u_2^{(n)}.$$

Por meio d'estas egualdades obtêm-se successivamente as derivadas $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ da fracção proposta; ou directamente a derivada $y^{(n)}$, expressa por um determinante.

IV. Seja y uma função de x determinada pelas equações

$$(A) \quad y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x .

Temos

$$y' = \frac{dy}{du} u',$$

$$y'' = \frac{d^2y}{du^2} u'^2 + \frac{dy}{du} u'',$$

$$y''' = \frac{d^3y}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} u' u'' + \frac{dy}{du} u''',$$

$$\dots\dots\dots$$

Vê-se facilmente que a expressão da derivada $y^{(n)}$ é da fórma:

$$y^{(n)} = \Sigma A \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda,$$

$A, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, i$ sendo numeros inteiros, que vamos determinar. Para isso, applicuemos a fórmula precedente á funcção

$$y = u^n, u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n representam constantes arbitrarías; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1) \dots (n-i+1) u^{n-i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda,$$

e, pondo $x=0$ e notando que é (n.º 105-I) $u_0^{(k)} = k! a_k$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma A n(n-1) \dots (n-i+1) (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda a_0^{n-i} a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\lambda.$$

Por outra parte, temos

$$\begin{aligned} y &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)^n \\ &= \Sigma \frac{n! a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n} x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n}}{h_0! h_1! h_2! \dots h_n!}, \end{aligned}$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de h_0, h_1 , etc. que satisfazem á equação

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = n,$$

devendo substituir-se $h_0!, h_1!, h_2!$, etc. pela unidade, quando é $h_0=0, h_1=0, h_2=0$, etc.

Derivando esta egualdade e pondo $x=0$, vem (n.º 105-I)

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{(n!)^2 a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n}}{h_0! h_1! h_2! \dots h_n!},$$

onde Σ se refere agora a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de h_0, h_1, h_2 , etc. que satisfazem ás equações

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = n, h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n = n.$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$, que vimos de achar, devem ser identicos, quaesquer que sejam os valores de a_0, a_1, a_2 , etc.; portanto vem

$$\alpha = h_1, \beta = h_2, \dots, \lambda = h_n, h_0 = n - i = n - (\alpha + \beta + \dots + \lambda),$$

$$A = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}.$$

CC

Temos pois a fórmula

$$(3) \quad y^{(n)} = \Sigma \frac{n! \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda},$$

onde Σ se refere a todos os valores inteiros, positivos ou nulos, de $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ que satisfazem á equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n,$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda.$$

Deve observar-se que na fórmula (3) devem substituir-se nos denominadores os factores que forem nulos pela unidade, como se faz na lei do desenvolvimento dos polynomios, d'onde a fórmula é tirada.

NOTA. — A respeito dos coefficients numericos

$$A = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}$$

faremos algumas observações.

1.º *Estes coefficients são numeros inteiros.*

Esta propriedade resulta da demonstração precedente, e constitue um theorema interessante de Arithmetica, a que se póde tambem chegar por considerações relativas á theoria das combinações ⁽¹⁾.

2.º Sendo $y = u^k$, $u = e^x - 1$, temos

$$\frac{dy}{du} = ku^{k-1}, \quad \frac{d^2y}{du^2} = k(k-1)u^{k-2}, \quad \dots, \quad \frac{d^ky}{du^k} = k!,$$

$$\frac{d^{k+1}y}{du^{k+1}} = 0, \quad \dots, \quad u' = u'' = \dots = e^x;$$

e, pondo $x = 0$,

$$\left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0, \quad \dots, \quad \left(\frac{d^ky}{du^k}\right)_0 = k!, \quad \dots,$$

$$u'_0 = u''_0 = \dots = 1.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. cxiii, pag. 1066.

Substituindo em (3), vem a fórmula seguinte, de que adiante faremos uso :

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^k}{dx^n} \right)_0 = \Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficients da fórmula (3) que correspondem ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = k.$$

3.º Sendo $y = e^u$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{d^i y}{du^i} = e^u, u' = u'' = \dots = e^x,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^i y}{du^i} \right)_0 = 1, u' = u'' = \dots = 1.$$

Logo, applicando (3), virá a fórmula

$$\left(\frac{d^n (e^{e^x - 1} - 1)}{dx^n} \right)_0 = \Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficients da fórmula (3).

4.º O quociente $\frac{\Sigma A}{n!}$ tende para o limite zero, quando n augmenta indefinidamente ⁽¹⁾.

V. Seja

$$y = f(u_1, u_2, \dots, u_l), u_1 = \varphi_1(x), u_2 = \varphi_2(x), \dots, u_l = \varphi_l(x),$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x .

Para resolver esta questão, empregaremos o mesmo methodo que em um artigo que a este respeito publicámos no *Giornale di Matematiche* (Napoli, tom. XVIII), que passamos a expôr.

⁽¹⁾ Para a demonstração d'esta propriedade veja-se :

Oliveira Ramos e C. J. de Faria : *Sobre os coefficients etc.* (*Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, tom. VII).

Temos

$$y' = \frac{\partial f}{\partial u_1} u'_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} u'_2 + \dots$$

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} (u'_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} u'_1 u'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_1} u''_1 + \dots$$

.....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n tem a fórmula:

$$(b) \quad \begin{cases} y^{(n)} = \Sigma A \frac{d^n f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \dots} (u'_1)^\alpha (u''_1)^\beta \dots (u_1^{(n)})^\lambda \\ \quad \times (u'_2)^{\alpha'} (u''_2)^{\beta'} \dots (u_2^{(n)})^{\lambda'} \times \dots, \end{cases}$$

onde

$$m = a + b + c + \dots,$$

e onde $A, a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ são numeros inteiros, que vamos determinar. Para isso, applicuemos esta fórmula ás funcções

$$y = u_1^n u_2^n \dots u_i^n,$$

$$u_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

$$u_2 = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n,$$

$$\dots\dots\dots,$$

onde $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ representam constantes arbitrarías; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1) \dots (n-a+1) \times n(n-1) \dots (n-b+1) \times \dots$$

$$\times u_1^{n-a} (u'_1)^\alpha (u''_1)^\beta \dots \times u_2^{n-b} (u'_2)^{\alpha'} (u''_2)^{\beta'} \dots,$$

e, pondo $x=0$, e attendendo ao que se disse no n.º 105-I,

$$y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{aligned} & A n(n-1) \dots (n-a+1) \times n(n-1) \dots (n-b+1) \times \dots \\ & \times (2!)^{\beta+\beta'+\dots} (3!)^{\gamma+\gamma'+\dots} \dots (n!)^{\lambda+\lambda'+\dots} \\ & \times a_0^{n-a} a_1^\alpha a_2^\beta \dots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \dots \times \dots \end{aligned} \right\}.$$

Por outra parte, applicando a fórmula de Leibnitz ao producto considerado, vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{h_1! h_2! \dots h_n!} (u_1^{(h_1)})^{(h_1)} (u_2^{(h_2)})^{(h_2)} \dots,$$

onde Σ se refere a todos os valores inteiros, positivos ou nulos, de h_1, h_2 , etc. que satisfazem á equação

$$h_1 + h_2 + \dots + h_l = n;$$

ou, substituindo as derivadas $(u_1^n)^{(h_1)}$, $(u_2^n)^{(h_2)}$, etc. pelos seus valores, que se obtêm pela fórmula (3), e pondo $x=0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{n! n(n-1) \dots (n-a+1 \times n(n-1) \dots (n-b+1) \times \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! \alpha'! \beta'! \dots \lambda'! \dots} \\ \times a_0^{n-a} a_1^\alpha a_2^\beta \dots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \dots \times \dots,$$

onde Σ se refere aos valores inteiros, positivos ou nulos, de $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ que satisfazem ás equações

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \dots + h_1 \lambda &= h_1, \\ \alpha' + 2\beta' + \dots + h_2 \lambda' &= h_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \dots + h_l \lambda^{(l-1)} &= h_l, \end{aligned}$$

e portanto á equação

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \dots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \dots + n\lambda' + \dots \\ + \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \dots + n\lambda^{(l-1)} &= n, \end{aligned}$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \dots + \lambda, \quad b = \alpha' + \beta' + \dots + \lambda', \text{ etc.}$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de obter, devem ser identicos, qualquer que seja o valor das quantidades $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$; portanto os inteiros $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ devem ter os mesmos valores nas duas expressões de $y_0^{(n)}$, e deve ser

$$A = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! \times \alpha'! \beta'! \dots \lambda'! \times \dots \times (2!)^{\beta+\beta'+\dots} \dots (n!)^{\lambda+\lambda'+\dots}}$$

Estão pois determinadas as constantes que entram em (b), e temos a fórmula seguinte, que resolve a questão proposta:

$$(4) \quad y^{(n)} = \Sigma \left\{ \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! \times \alpha'! \beta'! \dots \lambda'! \times \dots} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^\alpha \partial u_2^\beta \dots} \right. \\ \left. \times (u_1')^\alpha \left(\frac{u_1''}{2!} \right)^\beta \dots \left(\frac{u_1^{(n)}}{n!} \right)^\lambda \times (u_2')^{\alpha'} \dots \left(\frac{u_2^{(n)}}{n!} \right)^{\lambda'} \times \dots, \right.$$

onde Σ se refere a todas as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \dots + n\lambda' + \dots \\ + \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \dots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \dots + \lambda, \quad b = \alpha' + \dots + \lambda', \text{ etc.},$$

e

$$m = a + b + c + \dots$$

VI. Consideremos agora a função implicita y , definida pela equação

$$f(x, y) = 0.$$

Temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0, \\ \dots\dots\dots$$

por meio das quaes se obtêm successivamente y' , y'' , etc.

A lei que seguem estas equações obtem-se applicando á função $f(x, y)$ a fórmula (4), pondo $u_2 = x$, $u_1 = y$ e considerando y como função de x , o que dá

$$(5) \quad \Sigma \frac{n!}{\alpha'! \alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{m-\alpha'}} (y')^\alpha (y'')^\beta \dots (y^{(n)})^\lambda = 0,$$

onde Σ se refere a todas as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha' + \alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$m = \alpha' + \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

A fórmula que precede dá a derivada de ordem n em função das anteriores. A fórmula que dá directamente $y^{(n)}$ é muito complicada, e porisso não a exporemos aqui ⁽¹⁾.

(1) Duarte Leite: *Sobre as derivadas etc. (Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, tom. iv).*

II

Aplicações

106. *Derivada da função arc tang x.* — I. A função $y = \text{arc tang } x$ dá $y' = (1+x^2)^{-1}$, d'onde se deduz (n.º 105-IV)

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(n-1)! i! (2x)^\alpha (1+x^2)^{-1-i}}{\alpha! \beta!},$$

onde $\alpha + 2\beta = n-1$, $i = \alpha + \beta$; e portanto

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \Sigma (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta} \\ \times (2x)^{n-1-2\beta} (1+x^2)^{\beta-n},$$

onde Σ se refere a todos os valores positivos de β , desde 0 até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

A expressão da derivada de ordem n da função considerada póde dar-se uma fórmula diferente da precedente. Pondo $x = \cot \varphi$, o que dá $\frac{d\varphi}{dx} = -\text{sen}^2 \varphi$, vem

$$y' = \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} = \text{sen}^2 \varphi, \quad y'' = -\text{sen } 2\varphi \text{sen}^2 \varphi, \text{ etc.}$$

Em geral

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \text{sen}^n \varphi \text{sen } n\varphi.$$

Demonstra-se facilmente esta fórmula mostrando que, se for verdadeira para a derivada da ordem n , também é verdadeira para a derivada da ordem $n+1$.

II. A comparação das duas expressões de $y^{(n)}$, que vimos de achar, dá a fórmula importante, attribuída a Viète:

$$\text{sen } n\varphi = \text{sen } \varphi \Sigma (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta} (2 \cos \varphi)^{n-1-2\beta}.$$

III. Se quizermos o valor de $y_0^{(n)}$, poremos $x=0$ na fórmula que dá $y^{(n)}$.

1.º Se n é *impar*, todos os termos da fórmula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n-1-2\beta=0$, e teremos portanto

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!.$$

2.º Se n é *par*, o expoente $n-1-2\beta$ não póde ser nullo, e teremos $y_0^{(n)}=0$.

107. Numeros de Bernoulli. — I. Consideremos a funcção

$$y = (1 + e^x)^{-1},$$

e procuremos o valor que toma $y^{(n)}$ quando é $x=0$.

Pondo

$$\varphi(x) = y - \frac{1}{2} = \frac{1 - e^x}{2(1 + e^x)},$$

vem

$$\varphi(-x) = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)},$$

e portanto

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

e

$$\varphi'(x) = \varphi'(-x), \quad \varphi''(x) = -\varphi''(-x), \text{ etc.}$$

Estas egualdades mostram que as derivadas de ordem par de $\varphi(x)$ se devem annullar quando se faz $x=0$, porque, se assim não fosse, teriam dois valores differentes para $x=0$, o que não póde ter logar.

As derivadas de y são eguaes ás derivadas de $\varphi(x)$, e portanto temos $y_0^{(n)}=0$, quando n é par.

As derivadas de ordem impar acham-se por meio da fórmula (3) do n.º 105, que dá

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n! i! e^{ix} (1 + e^x)^{-i-1}}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n, \quad i = \alpha + \beta + \dots + \lambda;$$

portanto temos, pondo $x=0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n! i!}{2^{i+1} \alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}.$$

Posto isto, chamam-se *numeros de Bernoulli* os numeros definidos pela egualdade

$$(a) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} y_0^{(n)};$$

os quaes porissô são nulos quando n é par, e, quando n é impar, podem ser calculados por meio da fórmula (4):

$$(6) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}-1} \Sigma (-1)^i \frac{i!}{2^{i+1} \alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda},$$

onde Σ se refere ás soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

II. De ser

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda}$$

um numero inteiro (n.º 105) e de ser $n+1$ par resulta que os *numeros de Bernoulli* não podem conter em denominador factores primos diferentes de 2 e dos factores primos de $2^{n+1}-1$, e que 2 não pôde ter expoente superior a n .

III. Da fórmula (6) vamos tirar outra mais propria para o calculo dos *numeros de Bernoulli*.

Com effeito, aquella fórmula dá

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \Sigma_{i=1}^n \left[(-1)^i \frac{i!}{2^{i+1}} \Sigma' \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda} \right],$$

onde Σ' se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

que dão a i o mesmo valor; e portanto (n.º 105-IV)

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \Sigma_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^i}{dx^n} \right)_0,$$

(1) Veja-se o nosso artigo: *Sur les nombres de Bernoulli*, publicado no *American Journal of Mathematics* de Baltimore, tom. VII.

ou, substituindo a derivada que entra no segundo membro pelo valor que se obtém desenvolvendo o binómio $(e^x - 1)^i$ e derivando n vezes o resultado,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} B_n &= (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left[i^n - i(i-1)^n \right. \\ &\quad \left. + \binom{i}{2} (i-2)^n - \binom{i}{3} (i-3)^n + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^n \right]. \end{aligned} \right.$$

Ou por meio d'esta fórmula, ou por meio da fórmula (6), obtém-se

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = \frac{5}{66}, \dots$$

Os números que vimos de calcular foram considerados pela primeira vez por Jacob Bernoulli na sua *Ars conjectandi*. Euler encontrou-os depois em muitas questões de Analyse. No tomo LXXXV do *Jornal de Crelle* foi dado por Adams uma taboa que contém todos estes números até B_{123} .

IV. Derivando n vezes a igualdade

$$y(e^x + 1) = 1,$$

vem

$$y^{(n)}(e^x + 1) + e^x \left[n y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1} y' + y \right] = 0.$$

Pondo $x=0$ e attendendo á fórmula (a), resulta a equação

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}} B_n + (-1)^{\frac{n}{2}} n \frac{2^n-1}{n} B_{n-1} \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2} \frac{2^{n-1}-1}{n-1} B_{n-2} \\ & + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{3} \frac{2^{n-2}-1}{n-2} B_{n-3} + \dots \\ & + (-1) \binom{n}{n-1} \frac{2^2-1}{2} B_1 + \frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

que, pondo $n = 2p - 1$, dá

$$2 \frac{2^{2p}-1}{p} B_{2p-1} - \binom{2p-1}{2} \frac{2^{2(p-1)}-1}{p-1} B_{2p-3} + \dots \pm \binom{2p-1}{2p-2} \frac{2^2-1}{1} B_1 \mp 1 = 0;$$

e, pondo $n = 2p$, dá

$$2p \frac{2^2-1}{p} B_{2p-1} - \binom{2p}{3} \frac{2^{2p-2}-1}{p-1} B_{2p-3} + \dots \pm \binom{2p}{2p-1} \frac{2^2-1}{1} B_1 \mp 1 = 0.$$

Temos assim duas relações *lineares recorrentes* entre os numeros de Bernoulli, por meio de qualquer das quaes se póde calcular successivamente B_1, B_3, B_5 , etc.

Foi Moivre quem primeiro achou uma relação recorrente entre os numeros de Bernoulli. Depois foram encontradas muitas outras.

V. Os numeros de Bernoulli apparecem em muitas questões de Analyse. Assim, por exemplo, os valores das derivadas da funcção

$$y = f(x) = \frac{x}{e^x - 1},$$

correspondentes a $x=0$, exprimem-se por meio d'estes numeros.

Com effeito, derivando n vezes a identidade

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1} = f(x) - f(2x),$$

vem (n.º 105-II) a seguinte:

$$x \frac{d^n \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^{n-1}} = f^n(x) - 2^n f^n(2x),$$

que, pondo $x=0$ e attendendo á fórmula (a), dá a relação, achada por Euler,

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} B_{n-1}.$$

Vê-se por esta egualdade que as derivadas de ordem impar de y são nullas.

A fórmula que precede não dá os valores de y_0 e y_0' . Para os achar, parte-se da equação

$$(e^x - 1)y = x,$$

*

que dá

$$\begin{aligned}(e^x - 1)y' + e^x y &= 1, \\ (e^x - 1)y'' + 2e^x y' + e^x y &= 0,\end{aligned}$$

e, pondo $x=0$, $y_0=1$, $y'_0=-\frac{1}{2}$.

VI. Do mesmo modo, no caso da função

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1},$$

temos, para determinar o valor de $y_0^{(n)}$, a fórmula

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} B_n,$$

a qual mostra que este valor é *nullo* quando n é *par*.

VII. Consideremos finalmente uma questão d'Algebra em que entram os numeros de Bernoulli.

Seja

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1},$$

e portanto

$$xy = (e^{nx} - 1) \frac{x}{e^x - 1}.$$

Derivando $k+1$ vezes esta egualdade e pondo $z = \frac{x}{e^x - 1}$, vem

$$\begin{aligned}xy^{(k+1)} + (k+1)y^{(k)} &= n^{k+1} e^{nx} z + (k+1)n^k e^{nx} z' \\ &+ \binom{k+1}{2} n^{k-1} e^{nx} z'' + \dots + \binom{k+1}{k} n e^{nx} z^{(k)} + (e^{nx} - 1) z^{(k+1)}\end{aligned}$$

e, pondo $x=0$,

$$y_0^{(k)} = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + \frac{kn^{k-1}}{2!} B_1 - k(k-1)(k-2) \frac{n^{k-3}}{4!} B_3 + \dots$$

Por outra parte, derivando k vezes a função y , vem

$$y^{(k)} = e^x + 2^k e^{2x} + \dots + (n-1)^k e^{(n-1)x},$$

e portanto

$$y_0^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k.$$

Temos pois a fórmula de Jacob Bernoulli

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + k \frac{n^{k-1}}{2!} B_1 - k(k-1)(k-2) \frac{n^{k-3}}{4!} B_3 + \dots,$$

que dá o desenvolvimento, ordenado segundo as potencias de n , da somma das potencias do grau k dos $n-1$ primeiros numeros e serve para calcular rapidamente esta somma, quando n é um numero grande.

Resulta d'esta egualdade, como corollario, a seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

de que se fez applicação no n.º 58.

108. Fórmula de Jacobi. — Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da função

$$y = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Applicando a fórmula (3) do n.º 105, vem a egualdade

$$y^{(n-1)} = \Sigma \frac{(n-1)! \left(n-\frac{1}{2}\right) \dots \left(n-\frac{1}{2}-i+1\right) (-2x)^\alpha (-2)^\beta (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{\alpha! \beta! (2)^\beta},$$

onde $\alpha + 2\beta = n-1$, $i = \alpha + \beta$; ou

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \Sigma \frac{(-1)^{n-1-\beta} (n-1)! (2n-1) \dots (2\beta+3) x^{n-1-2\beta} (1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n-1-2\beta)! \beta! 2^\beta} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.3 \dots (2n-1)}{n} \Sigma (-1)^\beta \frac{n! x^{n-1-2\beta} (1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{1.3 \dots (2\beta+1) (n-1-2\beta)! \beta! 2^\beta}, \end{aligned}$$

que, por ser

$$2^\beta \times 1.2.3 \dots \beta \times 1.3 \dots (2\beta+1) = (2\beta+1)!,$$

da

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n} \Sigma (-1)^\beta \frac{(n-2\beta) \dots n x^{n-1-2\beta} (1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(2\beta+1)!},$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros positivos de β , desde 0 até $\frac{n-1}{2}$.

Pondo $x = \cos \omega$, vem

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n} \Sigma (-1)^\beta \frac{(n-2\beta) \dots n \cos^{n-1-2\beta} \omega \sin^{2\beta+1} \omega}{(2\beta+1)!}$$

ou, em virtude de uma fórmula de Trigonometria, dada no n.º 52,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n} \cdot \text{sen } n \text{ arc cos } x,$$

resultado devido a Jacobi⁽¹⁾.

109. Fórmula de Waring. — Seja

$$U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

uma equação dada e sejam x_1, x_2, \dots, x_m as m raízes d'esta equação.

Por ser

$$U = A_0 (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_m),$$

e portanto

$$\log U = \log A_0 + \Sigma \log (x - x_w),$$

temos, derivando n vezes,

$$\Sigma \frac{1}{(x - x_w)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n \log U}{dx^n}.$$

Substituindo no segundo membro d'esta egualdade U pelo seu valor, applicando a fórmula (3) e attendendo ás egualdades $U^{(m+1)} = 0$, $U^{(m+2)} = 0$, etc., vem

$$\Sigma \frac{1}{(x - x_w)^n} = (-1)^n n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! U^{-i} U'^\alpha U''^\beta \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (m!)^\lambda}$$

(1) *Jornal de Crelle*, tom. xv, 1836.

e portanto, pondo $x=0$,

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{1}{x_m^i} &= n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! U_0^{-i} U_0^\alpha U_0^\beta \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (m!)^\lambda} \\ &= n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! A_m^{-i} A_{m-1}^\alpha \dots A_0^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}.\end{aligned}$$

Applicando agora esta fórmula á equação

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0,$$

cujas raizes são reciprocas das raizes da equação primeiramente considerada, temos a *fórmula de Waring*⁽¹⁾

$$\sum_{\omega=1}^m x_\omega^n = n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! A_0^{-i} A_1^\alpha A_2^\beta \dots A_m^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda!},$$

onde $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ são as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + m\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Esta fórmula dá a somma das potencias de grau n das raizes da equação proposta.

Os coefficients numericos que entram na fórmula de Waring gozam das seguintes propriedades arithmeticas, que nos limitaremos a enunciar ⁽²⁾, quando n é igual ou inferior a m :

- 1.º A somma dos valores absolutos de todos os coefficients é igual a $2^n - 1$.
- 2.º A somma dos valores absolutos dos coefficients dos termos do grau i é igual a $\binom{n}{i}$.
- 3.º A somma dos valores absolutos dos coefficients dos termos do grau $n-i$ é igual á somma dos valores absolutos dos coefficients dos termos do grau i .

110. *Derivadas das funcções compostas de funcções lineares de x .* — Seja na fórmula (4)

$$u_1 = A_1 + B_1 x, \quad u_2 = A_2 + B_2 x, \quad \dots, \quad u_l = A_l + B_l x;$$

⁽¹⁾ Waring: *Meditationes algebrae*, 1772.

⁽²⁾ Estas propriedades foram dadas pelo sr. J. B. d'Almeida Arez em um trabalho publicado no tom. I dos *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, onde se pôde ver a sua demonstração.

teremos

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{\alpha! \alpha'! \dots \alpha^{(l-1)}!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^\alpha \partial u_2^{\alpha'} \dots} B_1^\alpha B_2^{\alpha'} \dots,$$

onde Σ se refere ás soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots + \alpha^{(l-1)} = n.$$

A fórmula que precede póde ser escripta *symbolicamente* da maneira seguinte:

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} B_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_l} B_l \right)^n,$$

devendo depois do desenvolvimento substituir-se $(\partial f)^n$ por $\partial^n f$.

111. *Differenciaes de ordem superior.* — A diferencial dy de $y=f(x)$, que está ligada com a derivada de y pela equação

$$dy = y' dx,$$

é uma função de x , cuja diferencial $d(dy)$ (que se representa por d^2y) se obtem differenciando o producto $y'dx$; o que dá

$$d^2y = y'' dx^2,$$

suppondo dx constante, qualquer que seja x , o que é sempre possível, visto que x representa a variavel independente e portanto o seu augmento dx é arbitrario.

Do mesmo modo se acha

$$d^3y = y''' dx^3, \quad d^4y = y^{(4)} dx^4, \text{ etc.}$$

As differenciaes dy , d^2y , d^3y , etc. têm respectivamente os nomes de *differenciaes de primeira ordem*, de *segunda ordem*, etc. de y .

Seja h um augmento dado a x e Δy o augmento correspondente de y , isto é,

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = f_1(x).$$

Teremos (n.º 64)

$$\Delta y = hf'(x + \theta h),$$

onde θ representa uma quantidade comprehendida entre 0 e 1.

Representando por $\Delta^2 y$ o augmento $\Delta (\Delta y)$ da função Δy , correspondente ao augmento h de x , vem do mesmo modo

$$\begin{aligned}\Delta^2 y &= f_1(x+h) - f_1(x) = hf'_1(x+\theta_1 h) \\ &= h[f'(x+\theta_1 h+h) - f'(x+\theta_1 h)] \\ &= h^2 f''(x+\theta_1 h+\theta_2 h).\end{aligned}$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se a fórmula geral

$$\Delta^n y = h^n f^{(n)}(x+\theta_1 h+\theta_2 h+\dots+\theta_n h)$$

ou, pondo $\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n=\theta$,

$$\Delta^n y = h^n f^{(n)}(x+\theta h),$$

θ representando uma quantidade compreendida entre 0 e n .

A Δy , $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc. dá-se respectivamente o nome de *diferença primeira*, *diferença segunda*, etc. da função $f(x)$.

Se a derivada $f^{(n)}(x)$ é continua, temos

$$\Delta^n y = h^n [f^{(n)}(x) + \varepsilon] = d^n y + \varepsilon h^n,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h ; logo a diferencial de ordem n é a parte proporcional a h^n da diferença de ordem n da função y .

112. Consideremos agora a função de duas variáveis independentes $z=f(x, y)$, cuja *diferencial total* é definida pela igualdade (n.º 71)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Esta expressão de dz é uma função de x e y que, sendo diferenciada, dá a expressão seguinte da *diferencial total de segunda ordem*:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

ou, *symbolicamente*,

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2.$$

EE

Continuando do mesmo modo, acha-se, por indução, a fórmula *symbolica*

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^n,$$

que se demonstra por meio de um calculo analogo ao que foi empregado no n.º 105-II, e onde se deve substituir, depois de effectuar o desenvolvimento da potencia indicada, $(\partial z)^n$ por $\partial^n z$.

Do mesmo modo, no caso da função de muitas variaveis

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_l),$$

se acha a fórmula *symbolica*

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_l} dx_l \right)^n.$$

III

Relações entre as funções e suas derivadas

113. Se a função $f(x)$ admittir as derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, \dots , $f^{(n)}(x)$, e se estas derivadas forem finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x , temos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + R_n,$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)! m} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

θ representando uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade.

Para demonstrar este theorema, basta applicar ás funções

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - (x - z)f'(z) - \frac{(x - z)^2}{2!}f''(z) - \dots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z),$$

$$\psi(z) = (x - z)^m$$

a fórmula conhecida (n.º 64-4.º)

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{\varphi'[x_0 + \theta(x - x_0)]}{\phi'[x_0 + \theta(x - x_0)]},$$

notando para isso, que $\varphi'(z)$ é dada pela igualdade

$$\varphi'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z).$$

A fórmula que vimos de demonstrar é conhecida pelo nome de *fórmula de Taylor*, e a respeito d'ella faremos as seguintes observações:

1.ª Pondo $x - x_0 = h$, a fórmula mencionada pôde ser escripta debaixo da fórma seguinte

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + R_n,$$

onde

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)! m} f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

2.ª A R_n chama-se *resto da serie de Taylor*. Da expressão d'este resto que vimos de achar, e que é devida a Schlömilch⁽¹⁾, deduz-se, pondo $m = n$, a fórmula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)] = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

devida a *Lagrange*; e, pondo $m = 1$, a fórmula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)] = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

devida a *Cauchy*.

3.ª Se R_n tender para zero, quando n tende para o infinito, a função $f(x)$ pôde ser desenvolvida em serie convergente, ordenada segundo as potencias de $x - x_0$, por meio da fórmula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^{(a)}(x_0) + \dots$$

(1) *Journal de Liouville*, 2.ª serie, tom. III.

4.^a Se na fórmula de Taylor pozermos $x_0=0$, vem a fórmula

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

onde

$$R_n = \frac{x^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m} f^{(n)}(\theta x),$$

conhecida pelo nome de *fórmula de Maclaurin*.

5.^a Se tiver logar o desenvolvimento em serie

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \dots + A_a(x-x_0)^a + \dots$$

e as funções $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(a)}(x)$ forem continuas no ponto x_0 , será

$$A_a = \frac{f^{(a)}(x_0)}{a!}.$$

Para demonstrar este theorema, notemos primeiro que, ponde $x=x_0$, vem $A_0=f(x_0)$.

Notemos em segundo logar que, pondo $x-x_0=h$, temos

$$f(x_0+h) - f(x_0) = A_1h + A_2h^2 + \dots,$$

d'onde se deduz

$$f'(x_0 + \theta h) = A_1 + A_2h + \dots,$$

e portanto

$$A_1 = f'(x_0).$$

Para completar a demonstração do theorema, basta notar que, se for verdadeiro para o coefficiente A_a , ainda é verdadeiro para o coefficiente A_{a+1} . Com effeito, temos

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^a}{a!}f^{(a)}(x_0) \\ &\quad + A_{a+1}h^{a+1} + A_{a+2}h^{a+2} + \dots, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{(a+1)!}f^{(a+1)}(x_0 + \theta h) = A_{a+1} + A_{a+2}h + \dots,$$

d'onde se tira, fazendo tender h para zero,

$$A_{a+1} = \frac{f^{(a+1)}(x_0)}{(a+1)!}.$$

6.º Quem primeiro applicou o Calculo differencial ao desenvolvimento das funcções em serie foi João Bernoulli, que deu em 1694, nas *Acta eruditorum*, uma fórmula muito geral para esse fim, em cujos termos figuram as derivadas da funcção dada. Alguns annos mais tarde, em 1715, Taylor appresentou no seu *Methodus incrementorum* a serie que vimos de obter, a qual só differe pela forma da que anteriormente tinha dado Bernoulli. Lagrange, que se occupou muito desta importante serie, deu na sua célebre *Théorie des fonctions analytiques* a expressão do resto precedentemente demonstrada, e abriu assim o caminho ao estudo das condições para que aquella serie possa ser applicada a uma funcção dada, o qual foi feito em seguida por Cauchy, empregando esta expressão e ainda outra, anteriormente mencionada, que publicou pela primeira vez no tomo I dos seus *Exercices de mathématiques*.

As duas expressões do resto que vimos de mencionar, só em poucos casos permitem reconhecer se a serie converge para a funcção dada, por ser em geral complicada a expressão da derivada de ordem n que n'ellas entra. Porisso Cauchy procurou tirar as condições d'esta convergencia directamente da natureza da funcção considerada por um methodo que será exposto em outro logar d'esta obra.

Para o estudo dos principaes modos de demonstrar e considerar a fórmula de Taylor que têm sido empregados até hoje, veja-se o nosso trabalho *Sobre o desenvolvimento das funcções em serie*, publicado nas *Memorias da Academia Real das Sciencias de Madrid* (tom. XVIII, 1897) ⁽¹⁾.

114. O theorema demonstrado no numero precedente é um corollario do seguinte, que nos limitamos a enunciar ⁽²⁾:

Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ admittirem as derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^{(m)}(x)$, e estas derivadas forem finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x , teremos a relação

$$\frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^l}{l!}f^{(l)}(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0)F'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!}F''(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!}F^{(k)}(x_0)}$$

$$= \frac{\frac{(x - x_0)^{l+1}}{(l+1)!}f^{(l+1)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + R_n}{\frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{(m-1)}(x_0) + R'_m},$$

⁽¹⁾ Transcripta no tom. I, pag. 1, das nossas *Obras sobre Mathematica*.

⁽²⁾ Este theorema é extrahido do nosso artigo *Sur une formule d'Analyse*, publicado nas *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Paris, 3.ª serie, tom. V), onde se póde ver a respectiva demonstração. Encontra-se este artigo no tom. II das nossas *Obras sobre Mathematica*.

onde

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)} [x_0 + \theta (x-x_0)],$$

$$R'_m = \frac{(x-x_0)^m (1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} F^{(m)} [x_0 + \theta (x-x_0)],$$

se o denominador do segundo membro se conservar diferente de zero, quando θ varia desde 0 até 1.

Para deduzir d'este theorema o de Taylor, basta pôr

$$F(x) = (x-x_0)^m, \quad k = m-1, \quad l = n-1.$$

115. Consideremos agora a função de duas variáveis independentes

$$z = f(x, y),$$

para estender a estas funções a fórmula de Taylor.

Pondo

$$x_0 + t(x-x_0) = u, \quad y_0 + t(y-y_0) = v, \quad \varphi(t) = f(u, v) = f[x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)]$$

e applicando a fórmula de Maclaurin a esta função de t , vem

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{t^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)! m} \varphi^{(n)}(\theta t).$$

Os coefficients de t que entram n'esta fórmula, são dados pelas egualdades

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y-y_0),$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(y-y_0)^2,$$

.....

que, pondo $t=0$, dão

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y-y_0),$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0 \partial y_0}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2,$$

.....

Para achar $\varphi^{(i)}(t)$, póde empregar-se o methodo usado no n.º 105-II para resolver uma questão analogá, ou a fórmula symbolica demonstrada no n.º 110, que dá

$$\varphi^{(i)}(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y-y_0) \right]^i,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(0)_t &= \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y-y_0) \right]^i, \\ \varphi^{(n)}(\theta t) &= \left[\frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x-x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y-y_0) \right]^n, \end{aligned}$$

onde é

$$u_1 = x_0 + \theta(x-x_0)t, \quad v_1 = y_0 + \theta(y-y_0)t.$$

Pondo agora nas fórmulas precedentes $t=1$, vem a seguinte:

$$\begin{aligned} z = f(x_0, y_0) &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y-y_0) \right]^i \\ &+ \frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m} \left[\frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x-x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y-y_0) \right]^n, \end{aligned}$$

que tem os mesmos usos que a fórmula de Taylor. O methodo que vem de ser empregado para a deduzir é devido a Cauchy.

Deve observar-se que, por ser baseada a doutrina precedente nos theoremas dos n.ºs 69 e 113, deve impôr-se á funcção $f(u, v)$ a condição de admittir derivadas parciaes relativas a u e v , até á ordem n , continuas nos intervallos de $u=x_0$ a $u=x$ e de $v=y_0$ a $v=y$.

CAPITULO V

Aplicações analyticas da fórmula de Taylor

I

Desenvolvimento em serie do binomio e de algumas funções algebricas

116. Consideremos em primeiro logar o binomio

$$y = (1 + x)^k,$$

onde k representa uma quantidade real qualquer.

Temos

$$\begin{aligned} y' &= k(1+x)^{k-1}, \\ y'' &= k(k-1)(1+x)^{k-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= k(k-1)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-n}; \end{aligned}$$

e portanto

$$y_0 = 1, y'_0 = k, \dots, y_0^{(n-1)} = k(k-1)\dots(k-n+2).$$

Logo, applicando a fórmula de Maclaurin com a expressão do resto de Cauchy, virá

$$\begin{aligned} (1+x)^k &= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \\ R_n &= \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{k-n} \\ &= \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{k-1}. \end{aligned}$$

1) Supponhamos primeiro que o valor absoluto de x é inferior á unidade.

FF

Por ser a razão dos dois termos consecutivos de ordem $n-1$ e $n-2$ da serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

igual a $\left(\frac{k}{n-1}-1\right)x$, esta razão tende para o limite $-x$, cujo valor absoluto é inferior á unidade, quando n tende para o infinito; e, portanto, esta serie é (n.º 22-III) convergente. Logo o seu termo geral

$$\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}$$

tende para 0, quando n tende para o infinito. Como porém esta quantidade coincide com o producto dos dois primeiros factores da expressão do resto R_n , e como além d'isso o factor $(1+\theta x)^{k-1}$ é finito e o factor $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é inferior á unidade, este resto tende tambem para 0, e temos a fórmula, descoberta por Newton:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-a+1)}{a!}x^a + \dots$$

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, a serie precedente é divergente, e esta egualdade não tem logar. Com effeito, a razão de dois termos consecutivos, isto é,

$$\frac{k-a+1}{a}x = \left(\frac{k+1}{a} - 1\right)x,$$

tende para um limite $-x$, cujo valor absoluto é superior á unidade, quando n tende para o infinito (n.º 22-III).

117. Do desenvolvimento em serie do binomio, que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento em serie de muitas outras funcções.

Assim, suppondo $f(x)$ uma funcção racional de x , em que o grau de x no numerador seja inferior ao grau de x no denominador, da egualdade (n.º 42)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{p_0 + p_1 x + \dots + p_i x^i} \\ &= \Sigma \frac{A}{(x-a)^k} = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-k} \end{aligned}$$

tira-se o desenvolvimento em serie

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

onde é

$$A_0 = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k}, \dots, A_n = \Sigma (-1)^k \binom{k}{n} \frac{A}{a^{k+n}}, \dots,$$

a qual tem logar quando o valor absoluto de x é inferior ao menor dos valores absolutos das quantidades designadas por $a^{(1)}$.

Convem notar que, para obter os coefficients A_0, A_1, A_2 , etc. da serie que vem de ser considerada, não é necessario conhecer as raizes da equação $\phi(x)=0$, pois que podem ser obtidos directamente, derivando a fracção dada, ou por meio das relações que resultam da egualdade

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = (p_0 + p_1 x + \dots + p_i x^i)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots),$$

effectuando a multiplicação indicada no segundo membro, ordenando o resultado segundo as potencias de x e egualando os coefficients das mesmas potencias de x nos dois membros. Vêem, com effeito, d'este modo a relação

$$a_n = p_0 A_n + p_1 A_{n-1} + \dots + p_i A_{n-i},$$

onde $a_{m+1} = 0, a_{m+2} = 0, \dots$, a qual tem logar quando $n < i$, e a relação

$$0 = p_0 A_n + p_1 A_{n-1} + \dots + p_i A_{n-i},$$

a qual tem logar quando $n \geq i$, por meio das quaes se calculam successivamente os coefficients A_0, A_1, A_2 , etc.

Vê-se pelo que precede que os coefficients do desenvolvimento procurado, a partir de A_i , estão ligados com os i anteriores por uma relação linear homogenea. As series cujos termos satisfazem a esta condição, dizem-se *recorrentes*. Foram estudadas por Moivre na sua *Miscellanea analytica*, e depois por Euler, Lagrange, etc. Podem ver-se diversos modos de calcular os seus coefficients e a sua relação com uma classe importante de funcções symetricas em um trabalho que publicámos em 1904 no *Giornale di Matematiche* (Napoli, tom. XLII) ⁽²⁾.

118. Desenvolvamos agora a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

em serie ordenada segundo as potencias de u .

⁽¹⁾ Supponos por agora que todas as raizes de $\phi(x)=0$ são reaes. Adiante veremos porém que o desenvolvimento considerado ainda tem logar quando alguma d'estas raizes são imaginarias, se o valor absoluto de x é inferior ao valor absoluto de todas as raizes reaes e ao modulo das imaginarias.

⁽²⁾ *Obras sobre Mathematica*, tom. II.

Pondo esta funcção debaixo da fórma

$$y = (u - u_1)^{-\frac{1}{2}} (u - u_2)^{-\frac{1}{2}} \\ = (u_1 u_2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

onde u_1 e u_2 representam as raizes da equação

$$u^2 - 2ux + 1 = 0,$$

vê-se que um dos casos em que ella é susceptível de ser desenvolvida em serie convergente ordenada segundo as potencias de u , é quando u_1 e u_2 são reaes e o valor absoluto de u é inferior ao de u_1 e u_2 ⁽¹⁾.

Em todos os casos em que y é susceptível de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de u , o desenvolvimento é da fórma

$$y = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \dots + X_k u^k + \dots,$$

onde X_0, X_1 , etc. representam funcções de x , que vamos determinar.

Por ser (n.º 105-IV)

$$y^{(k)} = \Sigma \frac{k! \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-i+1\right) (-2x+2u)^\alpha 2^\beta y^{2i+1}}{\alpha! \beta! 2^\beta} \\ = \Sigma (-1)^\beta \cdot \frac{k! 1.3.5 \dots (2i-1) (x-u)^\alpha y^{2i+1}}{\alpha! \beta! 2^\beta},$$

onde

$$\alpha + 2\beta = k, \quad i = \alpha + \beta,$$

teremos, representando m o maior inteiro contido em $\frac{k}{2}$,

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \cdot \frac{1.3.5 \dots (2k-2\beta-1)}{(k-2\beta)! \beta! 2^\beta} x^{k-2\beta}.$$

⁽¹⁾ Veremos adiante que o desenvolvimento considerado ainda tem logar quando, u_1 e u_2 sendo imaginarios, $|u|$ é inferior a $|u_1|$ e $|u_2|$.

Esta fórmula serve para calcular os polynômios X_k , conhecidos pelo nome de *polynômios de Legendre*, por terem sido estudados por este geometra eminente em um trabalho publicado em 1785 nas *Memorias da Academia das Sciencias de Paris*. Vamos estudar algumas das suas propriedades mais elementares.

I. Derivando k vezes a identidade

$$(x^2-1)^k = \sum_{\beta=0}^k (-1)^\beta \binom{k}{\beta} x^{2k-2\beta},$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k} &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^\beta \binom{k}{\beta} (2k-2\beta) \dots (k-2\beta+1) x^{k-2\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^\beta \binom{k}{\beta} \cdot \frac{(2k-2\beta)!}{(k-2\beta)!} x^{k-2\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^\beta \cdot \frac{k \dots (k-\beta+1) \times 1.3 \dots (2k-2\beta-1) \times 2.4 \dots (2k-2\beta)}{\beta! (k-2\beta)!} x^{k-2\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^\beta \cdot \frac{1.3 \dots (2k-2\beta-1) 2^{k-\beta} k!}{\beta! (k-2\beta)!} x^{k-2\beta}. \end{aligned}$$

Comparando esta egualdade com a expressão de X_k anteriormente achada, deduz-se a fórmula notavel, devida a Olinde Rodrigues,

$$X_k = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k}.$$

II. Derivando a função

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

relativamente a u , vem

$$y' = (x-u) (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{3}{2}},$$

e portanto

$$y' (1 - 2ux + u^2) = (x-u) y.$$

Derivando agora k vezes esta equação, temos (n.º 105-II)

$$y^{(k+1)} (1 - 2ux + u^2) - k y^{(k)} (2x - 2u) + 2 \binom{k}{2} y^{(k-1)} = y^{(k)} (x-u) - k y^{(k-1)},$$

e portanto, pondo $u=0$,

$$y_0^{(k+1)} - (2k+1)xy_0^{(k)} + k^2 y_0^{(k-1)} = 0.$$

Esta equação, pondo $X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}$, dá

$$(k+1) X_{k+1} - (2k+1)x X_k + k X_{k-1} = 0.$$

Temos assim uma relação *linear recorrente* entre tres polynomios consecutivos de Legendre, por meio da qual se podem formar successivamente estes polynomios a partir do terceiro.

III. Como a equação $(x^2-1)^k=0$ tem k raizes eguaes a $+1$ e k raizes eguaes a -1 , a equação $\frac{d(x^2-1)^k}{dx}=0$ terá $k-1$ raizes eguaes a $+1$, $k-1$ raizes eguaes a -1 e (em virtude do theorema de Rolle) uma raiz real comprehendida entre $+1$ e -1 .

Pela mesma razão, a equação $\frac{d^2(x^2-1)^k}{dx^2}=0$ terá $k-2$ raizes eguaes a $+1$, $k-2$ raizes eguaes a -1 e duas raizes deseguaes comprehendidas entre $+1$ e -1 .

Continuando o mesmo raciocinio, conclue se enfim que a equação $X_k=0$ tem k raizes reaes e deseguaes, comprehendidas entre $+1$ e -1 (Legendre)

IV. Pondo $(x^2-1)^k=z$, temos

$$k \log(x^2-1) = \log z,$$

e, derivando,

$$(x^2-1) z' - 2kxz = 0.$$

Derivando $k+1$ vezes esta equação, vem

$$(x^2-1) z^{(k+2)} + 2(k+1)xz^{(k+1)} + k(k+1)z^{(k)} - 2k[xz^{(k+1)} + (k+1)z^{(k)}] = 0,$$

ou, pondo $z^{(k)} = 2^k k! X_k$ e fazendo as reduções,

$$(x^2-1) X_k'' + 2x X_k' - k(k+1) X_k = 0.$$

Os polynomios de Legendre são pois soluções de uma equação differencial linear de segunda ordem (Legendre).

V. Da relação entre tres polynomios de Legendre consecutivos (II) vamos tirar o limite para que tende a razão $\frac{X_k}{X_{k+1}} = A_k$, quando k augmenta indefinidamente, suppondo $|x| > 1$.

Dividindo primeiramente esta relação por $k X_{k+1}$, vem

$$1 + \frac{1}{k} - \left(2 + \frac{1}{k}\right)x A_k + A_k A_{k-1} = 0.$$

Consideremos em seguida a relação

$$1 - 2x B_k + B_k B_{k-1} = 0,$$

que determina uma serie de funções B_0, B_1 , etc., dada uma d'ellas B_0 , que supponhamos ser igual a A_0 .

Chamando z_1 e z_2 as raizes da equação

$$1 - 2xz + z^2 = 0$$

e notando que é $z_1 + z_2 = 2x$, $z_1 z_2 = 1$, podemos escrever a equação precedente debaixo da forma

$$B_k B_{k-1} - (z_1 + z_2) B_k + z_1 z_2 = 0,$$

ou

$$\frac{B_k - z_1}{B_k - z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{B_{k-1} - z_1}{B_{k-1} - z_2}.$$

Mudando n'esta equação successivamente k em $k-1, k-2, k-3, \dots, 2, 1$, vem uma serie de equações, das quaes se deduz

$$\frac{B_k - z_1}{B_k - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^k \frac{B_0 - z_1}{B_0 - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^k \frac{A_0 - z_1}{A_0 - z_2}.$$

Esta egualdade mostra que B_k tende para o limite z_1 , quando k augmenta indefinidamente, se é $|z_2| > |z_1|$, e que tende para o limite z_2 , se é $|z_2| < |z_1|$.

Por outra parte, se na equação de que se partiu substituirmos as quantidades A_k e A_{k-1} por B_k e B_{k-1} , obtem-se o resultado $\frac{1}{k} (1 - x B_k)$, que tende para 0 quando k tende para ∞ ; e vê-se portanto que A_k e B_k tendem para um mesmo limite, quando k tende para ∞ .

Logo a razão A_k de dois polynomios de Legendre consecutivos tenderá para aquella das quantidades $x + \sqrt{x^2 - 1}$ e $x - \sqrt{x^2 - 1}$ que tiver menor valor absoluto, quando k augmenta indefinidamente.

II

Desenvolvimento em serie de algumas funções transcendentess

119. *Exponencial.* — Principiemos pela exponencial $y = e^x$, que dá $y^{(n)} = e^x$, e portanto $y_0^{(n)} = 1$.

Applicando a fórmula de Maclaurin, com a expressão do resto de Lagrange, vem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n, \quad R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Suppondo x comprehendido entre os dois inteiros m e $m+1$, o resto R_n é o producto dos três factores

$$\frac{x^m}{m!}, \frac{x}{m+1}, \frac{x}{m+2} \dots \frac{x}{n}, e^{\theta x},$$

dos quaes o primeiro e o terceiro são finitos, e o segundo, por ser menor do que $\frac{x}{n}$, tende para zero, quando n tende para o infinito. Logo R_n tende tambem para 0, e temos o desenvolvimento em serie, descoberto por Newton,

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

que tem logar qualquer que seja o valor de x .

I. Se x for positivo e menor do que $n+1$, temos

$$R_n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots < \frac{x^n}{n!} \left[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \dots \right]$$

e portanto, sommando a progressão que entra no segundo membro,

$$R_n < \frac{(n+1)x^n}{n!(n+1-x)}.$$

Se x for negativo e inferior, em valor absoluto, a $n+1$, temos (n.º 22-VII)

$$|R_n| < \frac{|x|^n}{n!}.$$

Por meio d'estas fórmulas calcula-se um limite superior do erro que se commette, quando se toma para valor de e^x a somma dos n primeiros termos do seu desenvolvimento.

II. Pondo na fórmula (1) $x=0$, vem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Por esta serie calcula-se o valor de e mais rapidamente do que pelo processo indicado no n.º 30.

Este numero e é irracional. Com effeito, se e fosse igual a uma fracção $\frac{m}{n}$, teriamos

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &< \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

ou

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!n}$$

ou

$$(n-1)!m - 2(n!) - \dots - 1 < \frac{1}{n};$$

e portanto o numero inteiro positivo, que o primeiro membro d'esta egualdade representa, seria menor do que uma fracção, o que é absurdo.

Lambert demonstrou que todas as potencias inteiras de e são irracionais, e modernamente Hermite demonstrou que este numero é transcendente, isto é, que não póde ser raiz de uma equação algebrica com coefficients racionais ⁽¹⁾.

120. *Logarithmo de (1+x).* — Consideremos agora a funcção $y = \log(1+x)$.

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LXXVII. Veja-se tambem no tom. CXVI uma demonstração muito elementar da mesma proposição, devida a Hurwitz.

Por ser

$$y' = (1+x)^{-1}, \quad y'' = -(1+x)^{-2}, \quad y''' = (-1)^2(1+x)^{-3}, \quad \dots, \\ y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},$$

a fórmula de Maclaurin dá, empregando a expressão do resto de Cauchy,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n, \\ R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1} x^n \frac{1}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1}.$$

1) Se x estiver compreendido entre $+1$ e -1 , a fracção $\frac{1}{1+\theta x}$ é finita, a fracção $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é menor do que a unidade e x^n tende para zero, quando n tende para o infinito. Logo R_n tem por limite zero, quando n augmenta indefinidamente, e a função proposta pôde ser desenvolvida em serie pela seguinte fórmula, publicada em 1668 por Mercator na sua *Logarithmotechnica*:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^a}{a} \mp \dots$$

É facil ver, empregando a expressão do resto de Lagrange, que esta fórmula ainda subsiste quando $x=1$.

2) Se o valor absoluto de x for superior á unidade, esta serie é divergente (n.º 22-III), visto que a razão dos dois termos consecutivos $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ e $\frac{x^a}{a}$ tende para o limite x , quando a tende para ∞ . Tambem é divergente quando $x=-1$.

I. Da fórmula precedente deduz-se outra, adoptada ao calculo dos logarithmos dos numeros inteiros. Ponhamos para isso

$$x = \frac{p-q}{p+q},$$

o que dá

$$\frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x},$$

e portanto

$$\log p - \log q = \log(1+x) - \log(1-x) \\ = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right) \\ = 2 \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^n + \dots \right],$$

onde n é impar.

Esta serie é tanto mais convergente quando menor for $p - q$ e maior for $p + q$, e serve para calcular $\log p$, quando $\log q$ é conhecido. Pondo $q = 1$, dá immediatamente $\log p$.

O erro que se commette parando no termo de grau $n - 2$ d'esta serie é inferior á somma da progressão

$$\frac{2}{n} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^n \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^4 + \dots \right],$$

isto é, ao numero

$$\frac{(p-q)^n}{2npq(p+q)^{n-2}}.$$

121. Funções circulares. — I. Consideremos a função $y = \sin x$. Temos, applicando a fórmula de Maclaurin,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \sin \left(\theta x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

e portanto, visto que $\sin \left(\theta x + n \frac{\pi}{2} \right)$ é finito e $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero, quando n augmenta indefinidamente,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \pm \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!} \mp \dots,$$

qualquer que seja x .

II. Do mesmo modo se acha o desenvolvimento em serie de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \pm \frac{x^{2a}}{(2a)!} \mp \dots$$

As funções $\sin x$ e $\cos x$ appareceram pela primeira vez na Trigonometria, e ahi foram obtidas geometricamente as suas propriedades. Definindo estas funções pelas series precedentes, descobertas por Newton, póde constituir-se analyticamente toda a sua theoria ⁽¹⁾.

III. Applicando finalmente a fórmula de Maclaurin á função $y = \arctan x$, vem (n.º 106), considerando o valor de y comprehendido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \sin^n \varphi \sin n\varphi,$$

(1) Tannery: *Introduction à la théorie des fonctions*, 1886, pag. 153. — Godefroy: *Théorie élémentaire des séries*, 1903, pag. 149.

onde φ é dado pela igualdade $\theta x = \cot \varphi$. Logo, quando $|x|$ é igual ou inferior á unidade, R_n tende para zero, quando n tende para o infinito, e temos o desenvolvimento, descoberto por J. Gregory,

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \pm \frac{x^a}{a} \mp \dots$$

Se é $|x| > 1$ a serie precedente é divergente.

É um corollario da fórmula precedente a seguinte expressão de π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

III

Interpolação

122. O fim da interpolação é procurar uma função $f(x)$ que, quando a x se dão os valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, tome valores y_1, y_2, \dots, y_n dados.

Este problema é indeterminado, quando se não dá a fôrma da funcção. Aqui supponhamos que se quer que a funcção $f(x)$ seja inteira e do grau $k-1$, e n'este caso satisfaz evidentemente ao problema a funcção dada pela fórmula seguinte, devida a Lagrange:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_k)}y_1 \\
 & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_k)}y_2 \\
 & + \dots\dots\dots \\
 & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})}y_k.
 \end{aligned}$$

Emprega-se tambem muitas vezes, para resolver o mesmo problema, o methodo seguinte, devido a Newton.

Ponha-se

$$f(x) = A + B(x - x_1) + C(x - x_1)(x - x_2) + \dots + M(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

e determinem-se os coeficientes A, B, C, \dots, M de modo que y tome os valores y_1, y_2, \dots, y_k , quando x toma os valores x_1, x_2, \dots, x_k .

Temos primeiramente, pondo $x = x_1$, $A = y_1$. Pondo depois $x = x_2$, vem a egualdade

$$y_2 = y_1 + B(x_2 - x_1),$$

que determina B. A egualdade

$$y_3 = y_1 + B(x_3 - x_1) + C(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

determina depois C. Continuando do mesmo modo, determinam-se todos os coefficients da fórmula anterior.

As expressões analyticas d'estes coefficients em função de x_1, x_2 , etc. e de y_1, y_2 , etc. foram dadas por Ampère em um trabalho publicado no tomo XVI dos *Annales de Gergonne*.

I. Para o caso particular em que temos

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_k - x_{k-1} = h$$

deu Newton uma fórmula notavel, que vamos demonstrar.

Representemos, como no n.º 111, por $\Delta f(x)$ o augmento que recebe $f(x)$, por $\Delta^2 f(x)$ o augmento que recebe $\Delta f(x)$, etc., quando x recebe o augmento h ; temos

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) &= f(x_1) + \Delta f(x_1), \\ f'(x_1 + h) &= f'(x_1) + 2\Delta f(x_1) + \Delta^2 f(x_1), \\ f(x_1 + 3h) &= f(x_1) + 3\Delta f(x_1) + 3\Delta^2 f(x_1) + \Delta^3 f(x_1), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Obtem-se d'este modo, por indução, a fórmula geral

$$\begin{aligned} f(x_1 + nh) &= f(x_1) + n\Delta f(x_1) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x_1) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(x_1) + \dots, \end{aligned}$$

que se demonstra por um methodo analogo ao que foi empregado no n.º 105-II em uma questão semelhante.

Pondo agora n'esta relação $x_1 + nh = x$, vem a fórmula de Newton

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{h} \Delta f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2 h^2} \Delta^2 f(x_1) \\ &+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 h^3} \Delta^3 f(x_1) + \dots, \end{aligned}$$

que pretendiamos obter. Foi d'esta fórmula que Taylor partiu para achar a serie conhecida pelo seu nome.

II. A doutrina precedente applica-se ao calculo approximado dos valores que tem uma função $F(x)$, em um ponto qualquer x , quando se conhecem os valores y_1, y_2, \dots, y_k , que esta função tem nos pontos x_1, x_2, \dots, x_k .

Com effeito, a differença $F(x) - f(x)$ devendo ser nulla nos pontos x_1, x_2, \dots, x_k , temos

$$F(x) - f(x) = K(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k).$$

Consideremos agora a função

$$\varphi(z) = F(z) - f(z) - K(z - x_1) \dots (z - x_k),$$

a qual se annulla nos pontos x_1, x_2, \dots, x_k, x ; e supponhamos que as funções $f(z), f'(z), \dots, f^{(k)}(z)$ são finitas no intervallo comprehendido entre o maior M e o menor m d'estes numeros. A derivada $\varphi'(z)$ deve annullar-se em k pontos, comprehendidos entre m e M , a derivada $\varphi''(z)$ em $k - 1$ pontos, comprehendidos entre os precedentes, etc. Vê-se finalmente que $\varphi^{(k)}(z)$ se deve annullar em um ponto X , comprehendido entre m e M . Notando agora que $f^{(k)}(z) = 0$, por ser igual a $k - 1$ o grau de $f(z)$, podemos escrever

$$\varphi^{(k)}(X) = F^{(k)}(X) - k! K = 0,$$

e poranto

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{k!} F^{(k)}(X) (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k).$$

Vê-se pois que o polynomio $f(x)$, precedentemente determinado, tende para $F(x)$, quando k tende para ∞ , no caso de a expressão

$$R_k = \frac{1}{k!} F^{(k)}(X) (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k),$$

que se chama *resto*, tender para 0.

O methodo para o calculo approximado das quantidades que vem de ser considerado, foi dado por Newton no seu *Methodus differentialis*, publicado em 1711, e applicado por este grande geometra ao calculo das áreas planas. A expressão do resto que vem de ver-se foi dada por Ampère no trabalho precedentemente mencionado. Mais tarde será dada outra, devida a Hermite.

Quando a escolha dos numeros x_1, x_2, \dots, x_k , que entram na questão considerada, se poder fazer de um modo arbitrario, convem dar-lhes os valores $h \cos \frac{\pi}{2k}, h \cos \frac{3\pi}{2k}, \dots, h \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k}$ (h e $-h$ representando os valores entre os quaes varia x), para obter os resul-

tados mais rapidamente convergentes. Póde ver-se a demonstração d'esta proposição, devida a Tchebicheff, no *Calcul différentiel* de Bertrand, e podem ver-se outras vantagens do emprego d'estes numeros na nossa memoria sobre a convergencia da fórmula de interpolação de Lagrange, publicada no tomo CXXVI do *Jornal de Crelle* ⁽¹⁾.

123. Consideremos agora o caso mais geral de serem dados os valores que tomam a função $f(x)$ e suas derivadas, quando á variavel x se dão valores particulares.

Sejam x_1, x_2, \dots, x_k os valores dados a x , e sejam os valores correspondentes da função e suas derivadas os seguintes:

$$\begin{aligned} & y_1, y_1', \dots, y_1^{(\alpha-1)} \\ & \dots\dots\dots \\ & y_i, y_i', \dots, y_i^{(\beta-1)} \\ & \dots\dots\dots \\ & y_k, y_k', \dots, y_k^{(\lambda-1)}. \end{aligned}$$

Ponhamos ⁽²⁾

$$f_1(x) = (x-x_1)^\alpha \dots (x-x_i)^\beta \dots (x-x_k)^\lambda$$

e (n.º 42-I)

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \sum_{i=1}^k \left[\frac{M_1}{x-x_1} + \frac{M_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{M_\beta}{(x-x_i)^\beta} \right],$$

onde M_1, M_2, \dots, M_β são os coefficients de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \dots, h^0$ no quociente $\frac{h^\beta f(x_i+h)}{f_1(x_i+h)}$.

Por outra parte, representando por $A_1, A_2, \dots, A_\alpha; \dots; B_1, B_2, \dots, B_\beta; \dots$ os numeradores das fracções simples em que se decompõe a fracção $\frac{1}{f_1(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{f_1(x)} &= \frac{A_1 f(x)}{x-x_1} + \frac{A_2 f(x)}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x-x_1)^\alpha} \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ \frac{B_1 f(x)}{x-x_i} + \frac{B_2 f(x)}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{B_\beta f(x)}{(x-x_i)^\beta} \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ \frac{P_1 f(x)}{x-x_k} + \frac{P_2 f(x)}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{P_\lambda f(x)}{(x-x_k)^\lambda}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Obras sobre Mathematica*, t. 1.

⁽²⁾ A analyse que segue é tirada do nosso artigo *Sur une formule d'interpolation*, publicado nas *Memorias da Sociedade Real das Sciencias de Liège* (2.^a serie, tom. x).

Pondo $x = x_i + h$, multiplicando por h^β e ordenando segundo as potencias de h , vem

$$\begin{aligned} \frac{h^\beta f(x_i + h)}{f_1(x_i + h)} &= B_1 [h^{\beta-1} f'(x_i) + h^\beta f''(x_i) + \dots] \\ &\quad + B_2 \left[h^{\beta-2} f'(x_i) + h^{\beta-1} f''(x_i) + \frac{1}{2} h^\beta f'''(x_i) + \dots \right] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + B_\beta \left[f(x_i) + hf'(x_i) + \dots + \frac{1}{(\beta-1)!} h^{\beta-1} f^{(\beta-1)}(x_i) + \dots \right] \\ &\quad + Rh^\beta, \end{aligned}$$

onde o termo Rh^β contem as potencias de h , eguaes e superiores a β , que resultam dos termos

$$\frac{A_1 h^\beta f(x_i + h)}{x_i - x_1 + h}, \frac{A_2 h^\beta f(x_i + h)}{(x_i - x_1 + h)^2}, \text{ etc.}$$

da função considerada em que não entram B_1, B_2, \dots, B_β .
Temos pois

$$\begin{aligned} M_1 &= B_1 f(x_i) + B_2 f'(x_i) + \dots + \frac{1}{(\beta-1)!} B_\beta f^{(\beta-1)}(x_i), \\ M_2 &= B_2 f(x_i) + B_3 f'(x_i) + \dots + \frac{1}{(\beta-2)!} B_\beta f^{(\beta-2)}(x_i), \\ &\dots\dots\dots \\ M_\beta &= B_\beta f(x_i); \end{aligned}$$

e pertanto

$$f(x) = f_1(x) \sum_{i=1}^k \left\{ \left[\frac{B_1}{x-x_i} + \frac{B_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-x_i)^\beta} \right] y_i \right. \\ \left. + \left[\frac{B_2}{x-x_i} + \frac{B_3}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-x_i)^{\beta-1}} \right] y_i' \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{(\beta-1)!} \cdot \frac{B_\beta}{x-x_i} y_i^{(\beta-1)} \right\}.$$

Esta fórmula dá uma função inteira do grau $\alpha + \beta + \dots + \lambda - 1$, que resolve a questão

proposta. Vê-se que, para a applicar, é necessario decompôr em fracções simples a fracção $\frac{1}{f_1(x)}$.

A questão de que vimos de nos occupar foi considerada por Hermite no tomo LXXXIV do *Jornal de Crelle*, onde deu as condições para que uma funcção dada possa ser representada por $f(x)$ com um grau de approximação tanto maior, quanto maior forem os valores de k , α , β , etc. Estas condições serão consideradas em outro logar d'esta obra.

IV

Desenvolvimento em serie das funcções implicitas

124. A fórmula de Maclaurin applica-se tanto ás funcções explicitas como ás funcções implicitas. Aqui vamos fazer applicação d'ella á funcção implicita y definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x\varphi_1(u) + x^2\varphi_2(u) + \dots + x^k\varphi_k(u),$$

que vamos desenvolver em serie ordenada segundo as potencias de x .

Derivando a segunda equação relativamente a x e a t , vem

$$\frac{du}{dx} = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \dots + kx^{k-1}\varphi_k(u) + [x\varphi_1'(u) + x^2\varphi_2'(u) + \dots + x^k\varphi_k'(u)] \frac{du}{dx},$$

$$\frac{du}{dt} = 1 + [x\varphi_1'(u) + \dots + x^k\varphi_k'(u)] \frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} [\varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \dots + kx^{k-1}\varphi_k(u)]$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \theta_1 \frac{du}{dt},$$

pondo

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \dots + kx^{k-1}\varphi_k(u).$$

Mas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

HH

logo teremos

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 \frac{dy}{dt}.$$

Derivando esta equação relativamente a x e a t e chamando θ_2 a derivada de θ_1 relativamente a x , considerando u como constante, vem

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dx dt} \theta_1 + \frac{dy}{dt} \left[\theta_2 + \theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt} \right], \\ \frac{d^2y}{dx dt} &= \frac{d^2y}{dt^2} \theta_1 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt};\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \theta_1^2 + \frac{dy}{dt} \left[\theta_2 + 2\theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \frac{du}{dt} \right]$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt} \theta_2.$$

Derivando esta equação relativamente a x , obtem-se do mesmo modo

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^3\right)}{dt^2} + 3 \frac{d\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^2 \theta_2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt} \theta_3,$$

e assim sucessivamente.

Em geral, podemos pôr

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A \frac{d^{i-1}\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \dots \theta_k^\lambda\right)}{dt^{i-1}},$$

sendo A , i , α , β , etc. numeros inteiros que vamos determinar.

Para isso, applicuemos a fórmula precedente á função definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x + x^2 + \dots + x^k,$$

o que dá

$$\theta_1 = 1 + 2x + \dots + kx^{k-1} = \frac{du}{dx}, \quad \theta_2 = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \theta_3 = \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.};$$

e teremos

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A \frac{d^iy}{dt^i} \left(\frac{du}{dx} \right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^\beta \dots \left(\frac{d^ku}{dx^k} \right)^\lambda.$$

Por outra parte, temos (n.º 105-IV)

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (k!)^\lambda} \frac{d^iy}{du^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots,$$

onde Σ se refere às soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = n$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Comparando as duas fórmulas precedentes, obtem-se o valor de A e os de α, β, \dots .
Vem pois

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (k!)^\lambda} \cdot \frac{d^{i-1} \left[\frac{dy}{dt} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \dots \theta_k^\lambda \right]}{dt^{i-1}}.$$

Pondo agora $x=0$ nas fórmulas

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(x) + \dots + kx^{k-1}\varphi_k(u), \\ \theta_2 &= 2\varphi_2(u) + 2 \cdot 3x\varphi_3(u) + \dots + k(k-1)x^{k-2}\varphi_k(u), \\ &\dots\dots\dots \\ \theta &= k!\varphi_k(u),\end{aligned}$$

vem

$$\theta_1 = \varphi_1(u), \theta_2 = 2! \varphi_2(u), \dots, \theta_k = k! \varphi_k(u),$$

$$\theta_{k+1} = 0_{k+2} = \dots = 0;$$

e pertanto

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{d^{i-1} [f'(t) (\varphi_1(t))^\alpha (\varphi_2(t))^\beta \dots (\varphi_k(t))^\lambda]}{dt^{i-1}},$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = n, \quad i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

*

Applicando á funcção proposta a fórmula de Maclaurin, vem pois o desenvolvimento pedido:

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \frac{d^{n-1} [f'(t) (\varphi_1(t))^\alpha \dots (\varphi_k(t))^\lambda]}{dt^{n-1}} + R.$$

D'esta fórmula, que publicámos no nosso artigo *Sur le développement des fonctions implicites* (*Journal de Mathématiques de Liouville*, 3.^a serie, tom. VII), tira-se, pondo $k=1$, a fórmula notavel

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1} [f'(t) (\varphi_1(t))^n]}{dt^{n-1}} + R,$$

devida a Lagrange ⁽¹⁾, que dá o desenvolvimento em serie da funcção y definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x\varphi_1(u).$$

As condições de convergencia das series precedentes, que se não podem tirar da consideração do resto, por ser muito complicado, serão dadas n'outra parte d'este Curso.

V

Maximos e minimos ⁽²⁾

125. Diz-se que a funcção $y=f(x)$ é *maxima* ou tem um valor *maximo* no ponto $x=x_1$, quando o valor $f(x_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella tem nos pontos visinhos de x_1 ; isto é, quando existe um numero h_1 , tal que a desigualdade

$$f(x_1+h) - f(x_1) < 0$$

seja satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* ou tem um valor *minimo* no ponto $x=x_1$, se existe um numero h_1 , tal que a desigualdade

$$f(x_1+h) - f(x_1) > 0$$

seja satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

⁽¹⁾ *Oeuvres*, tom. III, pag. 25.

⁽²⁾ Foi Fermat o primeiro inventor de um methodo geral para determinar os valores maximos e minimos das funcções. Newton e Leibnitz applicaram a esta questão o methodo differencial.

Se a função dada tem uma derivada finita no ponto x_1 , a função cresce com x na vizinhança d'este ponto, se o numero $f'(x_1)$ é positivo, e decresce, se este numero é negativo (n.º 63). Logo, para que no ponto x_1 a função tenha um valor maximo ou minimo, deve ser $f'(x_1)=0$.

Supponhamos pois que é $f'(x_1)=0$ e que a função $f(x)$ tem no ponto x_1 uma derivada de segunda ordem finita e diferente de zero. Temos (n.ºs 55 e 63)

$$f(x_1+h)-f(x_1)=hf'(x_1+\theta h)=\theta h^2[f''(x_1)+\varepsilon_1],$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com h e θ uma quantidade positiva menor do que a unidade. Mas, attendendo a que ε_1 tende para 0 com h , vê-se que existe um numero positivo h_1 , tal que a desigualdade $|\varepsilon_1| < |f''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$, e portanto que $f''(x_1)+\varepsilon_1$ tem o signal de $f''(x_1)$ no intervallo considerado. Logo a desigualdade

$$f(x_1+h)-f(x_1) > 0,$$

é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1 , se o numero $f''(x_1)$ é positivo, ou a desigualdade

$$f(x_1+h)-f(x_1) < 0,$$

se o numero $f''(x_1)$ é negativo; e portanto a $x=x_1$ corresponde um valor minimo de y , quando $f''(x_1)$ é positivo, um valor maximo, quando $f''(x_1)$ é negativo.

Se for $f''(x_1)=0$ e se a função $f(x)$ tiver uma derivada de terceira ordem finita e diferente de zero no ponto x_1 , temos a egualdade

$$f(x_1+h)-f(x_1)=\frac{1}{2}h^2f''(x_1+\theta h)=\frac{1}{2}\theta h^3[f'''(x_1)+\varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h ; e esta egualdade, attendendo a que existe um numero h_1 , tal que a desigualdade $|\varepsilon_2| < |f'''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1 , mostra que o signal da differença $f(x_1+h)-f(x_1)$ muda com o signal de h , quando h varia desde $-h_1$ até h_1 . Logo no ponto x_1 a função $f(x)$ não póde ter valor maximo nem minimo.

Continuando do mesmo modo, obtem-se a regra seguinte, para achar os valores de x que tornam a função y maxima ou minima:

Resolva-se a equação $f'(x)=0$ e substitua-se cada um dos valores obtidos para x nas derivadas seguintes $f''(x)$, $f'''(x)$, \dots , até encontrar uma $f^{(n)}(x)$ que não se annulle. Se esta derivada for de ordem impar, ao valor de x considerado não corresponde nem maximo nem minimo; se for de ordem par, ao valor de x considerado corresponde um maximo, se este valor tornar a derivada $f^{(n)}(x)$ negativa, corresponde um minimo, se a tornar positiva.

Substituindo depois estes valores de x na função proposta, obtêm-se os valores máximos e mínimos procurados.

EXEMPLOS: 1.º Para achar os valores de x que tornam máxima ou mínima a função

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,$$

temos de resolver a equação

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0,$$

que dá $x = 1$ e $x = 2$,

Substituindo o valor $x = 1$ na derivada

$$y'' = 12x - 18,$$

vem um resultado negativo; portanto a $x = 1$ corresponde um máximo $y = 1$ da função considerada.

Substituindo o valor $x = 2$ na mesma derivada, vem um resultado positivo; portanto a $x = 2$ corresponde um mínimo $y = 0$.

2.º Achar o rectângulo de perimetro dado que tem maior área, e o rectângulo da área dada que tem menor perimetro.

Sejam x e y o comprimento dos lados do rectângulo e $2l$ o perimetro. Temos, representando por S a sua área,

$$y = l - x, \quad S = x(l - x),$$

e portanto

$$S' = l - 2x, \quad S'' = -2.$$

Pondo $S' = 0$, vem $x = \frac{1}{2}l$ e portanto $y = \frac{1}{2}l$. Logo o quadrado é o maior dos rectângulos considerados.

Seja agora $xy = a^2$, a representando uma quantidade dada. Temos

$$l = x + y = x + a^2 x^{-1}$$

e portanto

$$l' = 1 - a^2 x^{-2}, \quad l'' = 2a^2 x^{-3}.$$

Pondo agora $l' = 0$ e considerando sómente a solução positiva d'esta equação, que é a unica que satisfaz ao problema enunciado, vem $x = a$, e portanto $y = a$. Logo o quadrado é o menor dos rectângulos que têm uma área de valor dado.

3.º No caso da função $y = \cos \frac{1}{x}$, temos de resolver a equação

$$y' = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

que dá, considerando só os valores positivos de x , $x = \frac{1}{k\pi}$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

A derivada segunda

$$y'' = -\frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x}$$

dá $y'' = -k^4 \pi^4 \cos k\pi$; logo a $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{1}{2\pi}$, etc. correspondem alternadamente o mínimo -1 e o máximo $+1$.

Temos aqui o primeiro exemplo de uma função que, quando x se aproxima indefinidamente de zero, oscilla entre $+1$ e -1 ; de modo que, entre zero e um outro valor qualquer dado a x , tem um numero infinito de maximos e minimos. No ponto $x = 0$ a função é indeterminada.

120. Pela regra precedente acham-se os pontos em que a função $f(x)$ é maxima ou minima e admite uma derivada finita. Para achar pois todos os pontos em que $f(x)$ é maxima ou minima, é necessario considerar ainda os pontos em que esta função não admite derivada, e os pontos em que a derivada é infinita.

Seja x_1 um d'estes pontos. Para ver se n'elle a função é maxima ou minima, basta ver se $f'(x_1 + h)$ muda ou não de signal com h , quando h varia desde $-h_1$ até h_1 . Com effeito, se $f'(x_1 + h)$ muda de signal com h e passa de negativa para positiva, a função $f(x)$ passa de (n.º 63) decrescente para crescente, e portanto no ponto x_1 é minima. Se $f'(x_1 + h)$ muda de signal com h e passa de positiva para negativa, a função $f(x)$ é maxima no ponto x_1 . Se $f'(x_1 + h)$ não muda de signal com h , a função $f(x)$ não é maxima nem minima no ponto x_1 .

Applica-se este mesmo methodo quando se procuram os maximos e minimos correspondentes aos pontos que satisfazem á equação $f'(x) = 0$, se a função $f(x)$ não admite no ponto x_1 algumas das derivadas a que é necessario recorrer no methodo exposto no numero anterior, ou se alguma d'estas derivadas é infinita n'este ponto, ou ainda se o methodo anterior leva a calculos complicados.

Assim, por exemplo, a função

$$y = f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{2}{3} (x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

A derivada y' torna-se pois infinita quando é $x=a$, e póde portanto a função ser máxima ou minima no ponto a .

Pondo $x=a+h$ em $f'(x)$ vem o resultado $\frac{2}{3}h^{-\frac{1}{3}}$, e portanto $f'(a+h)$ passa no ponto a de negativa para positiva. A $x=a$ corresponde pois um valor minimo b da função dada.

127. Se a função cujos maximos e minimos queremos achar, for a função implicita y , definida pela equação $F(x, y)=0$, determinaremos, pela eliminação de x e y entre as equações

$$F(x, y)=0, \quad y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=0,$$

os valores de x que tornam y maxima ou minima e os valores de y correspondentes. Substituindo depois estes valores nas derivadas y'' , y''' , etc., vê-se, pela ordem da primeira derivada que não se annulla e pelo signal do resultado, quaes d'estes valores de y são maximos ou minimos.

Procuremos, por exemplo, as ordenadas maxima e minima da hyperbole cuja equação é

$$2x^2+3xy-2y^2+50=0.$$

Eliminando x e y entre a equação precedente e a equação

$$y'=\frac{4x+3y}{4y-3x}=0,$$

ou

$$2x+y=0,$$

vem $x=\pm 3$, $y=\mp 4$.

Derivando y' e pondo no resultado $x=3$ e $y=-4$, vem para y'' um valor negativo, logo á abscissa $x=3$ corresponde uma ordenada maxima $y=-4$, ou uma ordenada negativa, cujo valor absoluto é minimo e igual a 4. Os valores $x=-3$, $y=4$ dão a y'' um valor positivo; logo á abscissa $x=-3$ corresponde uma ordenada minima $y=4$.

128. *Funções de duas variaveis independentes.* — Diz-se que a função de duas variaveis $z=f(x, y)$ é maxima no ponto (x_1, y_1) , se o valor $f(x_1, y_1)$ da função é maior do que os valores que ella toma nos pontos visinhos de (x_1, y_1) ; isto é, se existe um numero positivo δ , tal que a desigualdade $f(x_1+h, y_1+k)<f(x_1, y_1)$ seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a função é minima no ponto (x_1, y_1) , se existe um numero δ ,

tal que a desigualdade $f(x_1 + h, y_1 + k) > f(x_1, y_1)$ seja satisfeita por todos os valores de h e k compreendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Todos os pontos (x, y) visinhos de (x_1, y_1) estão situados sobre as rectas representadas pela equação $y - y_1 = a(x - x_1)$ ou sobre a recta representada pela equação $x = x_1$. Para que a função z seja pois maxima no ponto (x_1, y_1) , é necessario e sufficiente que a função de uma variavel

$$(1) \quad f[x, y_1 + a(x - x_1)] = \varphi(x)$$

seja maxima no ponto $x = x_1$, qualquer que seja o valor de a , e que a função $f(x_1, y)$ seja tambem maxima no ponto $y = y_1$; e, para que z seja minima no referido ponto, é necessario e sufficiente que as funções precedent-s sejam minimas no ponto $x = x_1$ e $y = y_1$, qualquer que seja o valor de a .

Posto isto, supponhamos que $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são funções continuas de x e y , e procuremos os valores d'estas variaveis que tornam z maxima ou minima.

Notemos, para isso, que é condição necessaria para que a função (1) seja maxima ou minima no ponto $x = x_1$, quando a a se dá um valor particular qualquer, que a equação

$$\varphi'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} a = 0$$

seja satisfeita pelos valores $x = x_1$ e $y = y_1$. Para que a função (1) seja pois maxima ou minima, qualquer que seja o valor dado a a , devem x_1 e y_1 satisfazer ás equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Estas equações determinam pois os valores de x e y que podem dar a z um valor maximo ou minimo.

Derivando $\varphi'(x)$ relativamente a x , attendendo á segunda das equações precedentes e representando por r, s, t os valores que tomam as derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ no ponto (x_1, y_1) , vem o trinomio

$$\varphi''(x) = r + 2sa + ta^2,$$

que, para aos valores x_1 e y_1 de x e y poder corresponder um valor maximo ou minimo de z , deve ser nullo ou ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja o valor de a .

Sejam a_0 e a_1 as duas raizes da equação que resulta de egualar a zero o trinomio anterior, e portanto

$$\varphi''(x) = t(a - a_0)(a - a_1).$$

II

1.º Se as raízes a_0 e a_1 são reais e desiguais, $\varphi''(x)$ muda de sinal quando a passa por a_0 e por a_1 ; logo a função z não pôde ser n'este caso maxima nem minima no ponto considerado. Dá-se esta circumstancia quando é $rt - s^2 < 0$.

2.º Se as raízes a_0 e a_1 são imaginarias e eguaes a $p \pm iq$, temos

$$\varphi''(x) = t[(a-p)^2 + q^2],$$

e vê-se portanto que $\varphi''(x)$ tem sempre o signal de t , qualquer seja a , e que a função (1) é pois maxima no ponto $x = x_1$, quando t é negativo, e minima, quando t é positivo. A função $f(x_1, y)$ é tambem maxima no ponto $y = y_1$, quando t é negativo, e minima, quando t é positivo. Logo a função z é maxima no ponto (x_1, y_1) no primeiro caso e minima no segundo. Dá-se esta circumstancia quando é $rt - s^2 > 0$.

3.º Se as duas raízes a_0 e a_1 forem eguaes, isto é, se for $rt - s^2 = 0$, temos

$$\varphi''(x) = t(a - a_0)^2,$$

e vê-se portanto que $\varphi''(x)$ é nulla quando $a = a_0$ e tem o signal de t no caso contrario. Recorrendo n'este caso ás derivadas seguintes de z , ponha-se $x = x_1$, $y = y_1$ e $a = a_0$ nas expressões de $\varphi'''(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$, etc., até encontrar uma que não seja nulla. Se esta derivada for de ordem impar, a função z não é maxima nem minima no ponto (x_1, y_1) ; se esta derivada for de ordem par e o seu signal for differente do signal de t , tambem z não é maxima nem minima no ponto considerado; finalmente se esta derivada for de ordem par e tiver o signal de t , a função será maxima ou minima no ponto (x_1, y_1) , segundo este signal é — ou +.

4.º Se for $t = 0$ e r differente de zero, o calculo anterior não é applicavel, mas pôde-se em todo elle trocar x por y e resolver assim a questão.

5.º Se for ao mesmo tempo $t = 0$ e $r = 0$, temos a egualdade $\varphi''(x) = 2sa$; o signal de $\varphi''(x)$ muda pois com o signal de a e a função z não é maxima nem minima no ponto (x_1, y_1) .

6.º Se for $r = 0$, $s = 0$ e $t = 0$, a derivada $\varphi''(x)$ é nulla no ponto (x_1, y_1) , qualquer que seja a , e é portanto necessario recorrer á derivada $\varphi'''(x)$, que deve ser nulla, qualquer que seja a , para que n'este ponto possa z ser maxima ou minima, e depois á derivada $\varphi^{(4)}(x)$, que deve ser nulla ou ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja a , etc.

Podemos resumir a parte principal d'esta discussão na regra seguinte:

Para achar os valores maximos e minimos de z , resolvam-se relativamente a x e a y as equações $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ e substitua-se cada systema dos valores resultantes na expressão

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Os systemas de valores que dão $A > 0$ tornam z maximo, se o valor correspondente de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ é negativo, e minimo, se este valor é positivo.

Os systemas de valores que dão $A < 0$ não tornam z maximo nem minimo.

Para estudar o que acontece nos pontos em que é $A = 0$, é necessario recorrer ás derivadas de z de ordem superior á segunda ⁽¹⁾.

EXEMPLO 1.º Achar a mais curta distancia entre um ponto (x_0, y_0, z_0) e um plano

$$z = Ax + By + C.$$

Temos de achar os valores de x e y que tornam maxima ou minima a funcção

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

z sendo dada em funcção de x e y pela equação do plano.

As equações que determinam x e y são pois

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = 2(x - x_0) + 2A(z - z_0) = 0, \quad \frac{\partial D^2}{\partial y} = 2(y - y_0) + 2B(z - z_0) = 0;$$

e, como estas equações são as de uma recta perpendicular ao plano, segue-se que o ponto do plano cuja distancia ao ponto dado é minima coincide com o pé da perpendicular abaixada do ponto dado sobre o plano, como já se sabia.

Tirando d'estas equações e da equação do plano os valores de x , y e z e substituindo-os na expressão de D , vem a fórmula

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C - z_0}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o valor da minima distancia pedida.

Podemos verificar que o precedente valor de D é um minimo. Com effeito, pondo na expressão

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 2(A^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} = 2(B^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial x \partial y} = 2AB,$$

vem o resultado $4(1 + A^2 + B^2)$, que é positivo, assim como $\frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2}$.

⁽¹⁾ A theoria dos maximos e minimos das funcções de duas ou mais variaveis foi estudada por Lagrange em uma Memoria publicada em 1759 no tom. 1 da *Miscellanea Taurinensis*.

EXEMPLO 2.º Para fazer uma segunda applicação do methodo anterior, procuremos a maxima e a minima distancia entre os pontos de duas curvas planas dadas, cujas equações são $F(x, y) = 0$, $f(X, Y) = 0$.

A distancia D entre um ponto qualquer da primeira curva e um ponto qualquer da segunda é dada pela fórmula

$$D^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2,$$

e portanto os valores de x e X que podem tornar D^2 maxima ou minima e os valores de y e Y correspondentes são dados pelas equações das curvas e pelas seguintes:

$$X - x + (Y - y) Y' = 0, \quad X - x + (Y - y) y' = 0,$$

as quaes mostram que as rectas que unem os pontos das duas curvas cuja distancia é maxima ou minima, são normaes a estas curvas.

Sejam (x_1, y_1) , (X_1, Y_1) dois pontos assim determinados. Para completar a resolução do problema proposto, deve-se ainda verificar se as coordenadas (x_1, y_1) e (X_1, Y_1) satisfazem ou não a alguma das condições

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial x \partial X} \right)^2 \geq 0.$$

Supponhamos que é satisfeita a primeira d'estas condições. A distancia D^2 será então minima quando for

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D^2}{\partial X^2} = 1 + Y'^2 + (Y - y) Y'' > 0$$

nos pontos considerados, e maxima no caso de ter logar a desigualdade contraria. Representando por (a, b) as coordenadas do centro de curvatura da curva $F(X, Y) = 0$ no ponto (X, Y) , podemos escrever esta desigualdade do modo seguinte (n.º 90-I):

$$(1 + Y'^2) \frac{b - y}{b - Y} > 0,$$

o que mostra que a distancia D^2 é minima quando b não estiver comprehendido entre y_1 e Y_1 . A desigualdade contraria mostra que D^2 é maxima quando b está comprehendido entre y_1 e Y_1 .

VI

Indeterminações

129. Se a função $f(x)$ é indeterminada quando $x=a$, chama-se *verdadeiro valor da função* no ponto a o limite para que tende $f(x)$, quando x tende para a . Vamos procurar este limite em alguns casos mais importantes ⁽¹⁾.

I. Se for

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\phi(x)}$$

e as funções $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ se annullarem quando $x=a$, a função reduz-se a $\frac{0}{0}$ e vamos achar o seu verdadeiro valor. Por ser (n.º 64)

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\phi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\phi'(a+\theta_1 h)},$$

quando as funções $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ são continuas no ponto a e admitem derivadas de primeira ordem finitas nos pontos vizinhos de a , temos, n'este caso,

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\phi'(a+\theta_1 h)}.$$

Se for $\varphi'(a)=0$, $\phi'(a)=0$, temos do mesmo modo

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\phi'(a+\theta_1 h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi''(a+\theta_2 h)}{\phi''(a+\theta_2 h)}.$$

Em geral, se forem nullas as funções $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(a)$ e $\phi(a)$, $\phi'(a)$, ..., $\phi^{(n-1)}(a)$, teremos

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(n)}(a+\theta_n h)}{\phi^{(n)}(a+\theta_n h)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)}.$$

Por esta fórmula calcula-se o valor de $f(a)$, quando se sabe achar o limite para que tende o seu segundo membro.

(1) O calculo differencial foi applicado a esta questão por João Bernoulli em um artigo publicado em 1704 nas *Acta eruditorum*, onde considerou as fracções que se apresentam debaixo da fórma $\frac{0}{0}$.

Se as funções $\varphi^{(n)}(x)$ e $\phi^{(n)}(x)$ forem continuas no ponto a , podemos ainda escrever

$$f(a) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\phi^{(n)}(a)}.$$

No caso de ser $a = \alpha$, podemos pôr $x = \frac{1}{t}$ e depois fazer tender t para 0. Temos d'este modo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{\phi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t^2} \varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} \phi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x)}{\phi'(x)},$$

e a regra anterior é ainda applicavel.

EXEMPLO. A função

$$y = \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x}$$

é indeterminada, quando $x=0$, assim como a função

$$\frac{\varphi'(x)}{\phi'(x)} = \frac{-\sin x}{e^x - \cos x}.$$

A fracção

$$\frac{\varphi''(x)}{\phi''(x)} = \frac{-\cos x}{e^x + \sin x}$$

é igual a -1 , quando é $x=0$; logo -1 é o verdadeiro valor de y , correspondente a $x=0$.

II. Seja agora $f(a) = \frac{\varphi(a)}{\phi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ e procuremos o verdadeiro valor d'esta fracção, isto é, o limite para que tende $\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}$, quando x tende para a .

Representando por x_0 um numero tal que x esteja comprehendido entre x_0 e a , e suppondo que as funções $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ admittem derivadas finitas no ponto x_0 e nos pontos comprehendidos entre x_0 e a , e que $\phi'(x)$ é diferente de zero n'estes pontos, temos

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \frac{[\varphi(x) - \varphi(x_0)] \left[1 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}\right]}{[\phi(x) - \phi(x_0)] \left[1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right]} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta h) \left(1 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}\right)}{\phi'(x_0 + \theta h) \left(1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right)},$$

onde $h = x - x_0$.

Suppondo agora que a fracção $\frac{\varphi'(x)}{\phi'(x)}$ tende para um limite finito e determinado A, quando x tende para a , tambem a fracção $\frac{\varphi'(x_0 + \theta h)}{\phi'(x_0 + \theta h)}$ tende para o mesmo limite, quando x_0 tende para a , visto que $x_0 + \theta h$ está comprehendido entre x_0 e x e portanto entre x_0 e a . Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a que esta fracção deffira tão pouco quanto se queira de A.

Depois de escolher d'este modo x_0 , por ser

$$\lim_{x=a} \frac{1 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = 1,$$

podemos dar a ε um valor tão pequeno que, para os valores de x comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, a fracção que entra no primeiro membro d'esta egualdade deffira da unidade tão pouco quanto se queira.

Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a e a ε um valor tão pequeno que, para todos os valores de x comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, a fracção $\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}$ diffira tão pouco quanto se queira de A; e temos portanto ⁽¹⁾

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\phi'(x)},$$

e, se $\varphi'(x)$ e $\phi'(x)$ são continuas no ponto a ,

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\phi'(a)}.$$

Logo acha-se o verdadeiro valor da fracção considerada pela mesma regra que no caso anterior.

Se for $A = \infty$, teremos

$$\lim_{x=a} \frac{\phi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\phi'(x)}{\varphi'(x)} = 0,$$

e portanto $\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \infty$. A regra é pois ainda applicavel.

⁽¹⁾ A demonstração precedente é tirada do *Calcolo differentiale* de Genocchi e Peano (Turin, 1884).

EXEMPLO. A função

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \frac{\log x}{x^{-n}}$$

dá $\frac{\infty}{\infty}$, quando $x=0$. Mas o quociente

$$\frac{\varphi'(x)}{\phi'(x)} = \frac{x^{-1}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$$

é nullo, quando $x=0$; logo é também nulla a função considerada.

III. Se a função $f(x) = \varphi(x) \cdot \phi(x)$ se reduzir a $0 \times \infty$, quando $x=a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á fracção $\frac{\varphi(x)}{[\phi(x)]^{-1}}$, que se reduz a $\frac{0}{0}$, ou á fracção $\frac{\phi(x)}{[\varphi(x)]^{-1}}$, que se reduz a $\frac{\infty}{\infty}$.

EXEMPLO. A função

$$y = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

dá $0 \times \infty$, quando $n=\infty$. Para achar o seu verdadeiro valor, consideremos a fracção

$$y = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{n^{-1}},$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$ e que dá, derivando o numerador e o denominador relativamente a n , a fracção

$$\frac{-n^{-2} x^{\frac{1}{n}} \log x}{-n^{-2}},$$

que se reduz a $\log x$, quando $n=\infty$. Logo temos a fórmula notavel

$$\log x = \lim_{n=\infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

IV. Se a função $f(x) = \varphi(x) - \phi(x)$ se reduzir a $\infty - \infty$, quando $x=a$, acha-se o seu

verdadeiro valor, applicando a regra anterior á fracção

$$\frac{\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x) \phi(x)}},$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$.

V. Se a funcção $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ se reduzir a 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á funcção

$$\log y = \psi(x) \log \varphi(x),$$

que se reduz a $0 \times \infty$.

EXEMPLO. A funcção

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

quando $n = \infty$, dá 1^∞ . Para achar o seu verdadeiro valor, determinemos o verdadeiro valor da funcção

$$\log y = n \log \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\log \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{n^{-1}},$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$; o que dá $\log y = x$, e portanto $y = e^x$. Temos pois a fórmula seguinte, dada por João Bernoulli:

$$e^x = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

CAPITULO VI

Aplicações geometricas da fórmula de Taylor

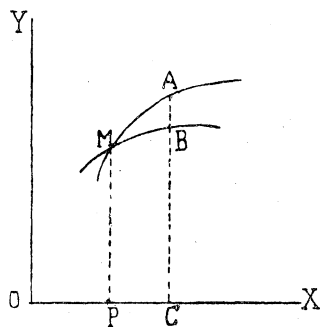
I

Curvas planas

130. *Contacto das curvas planas.* — Sejam

$$y = f(x), \quad Y = F(X)$$

as equações de duas curvas que passam por um ponto M, cujas coordenadas são x_0 e y_0 , e sejam A e B dois pontos das mesmas curvas, correspondentes á abscissa $x_0 + h$. Se o



segmento AB, igual á diferença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ das ordenadas AC e BC d'estes pontos, for infinitamente pequeno de ordem $n+1$ relativamente a PC, diz-se que as curvas têm no ponto (x_0, y_0) um *contacto de ordem n*.

Se pelo ponto (x_0, y_0) passar uma terceira curva $y = \varphi(x)$, que tenha com a curva $y = f(x)$ um contacto de ordem m , e se for $n > m$, a segunda das curvas consideradas aproxima-se mais da curva $y = f(x)$, na vizinhança do ponto (x_0, y_0) , do que a terceira curva $y = \varphi(x)$. Com effeito, representando respectivamente por β e α as diferenças $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ e

*

$\varphi(x_0 + h) - f(x_0 + h)$, é, por definição,

$$\beta = h^{n+1}(A + \varepsilon), \quad \alpha = h^{m+1}(B + \varepsilon'),$$

onde A e B representam quantidades finitas diferentes de zero, e ε e ε' quantidades infinitamente pequenas com h ; portanto temos a egualdade

$$\alpha - \beta = h^{m+1}[B + \varepsilon' - h^{n-m}(A + \varepsilon)],$$

a qual faz vêr que se póde dar a h_1 um valor tão pequeno que $\alpha - \beta$ tenha o signal de $h^{m+1}(B + \varepsilon')$, isto é, o signal de α , quando $|h| < h_1$. Será pois, para todos os valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e $+h_1$, $\beta < \alpha$.

131. As condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n , decorrem immediatamente da fórmula de Taylor, que dá

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - f(x_0 + h) &= F(x_0) - f(x_0) \\ &+ h[F'(x_0) - f'(x_0)] + \dots + \frac{h^n}{n!}[F^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)] \\ &+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[F^{(n+1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)]. \end{aligned}$$

Com effeito, se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n+1$, continuas no ponto x_0 , para que a differença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ seja infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h , é necessario e sufficiente que as differenças

$$F(x_0) - f(x_0), F'(x_0) - f'(x_0), \dots, F^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)$$

sejam nullas, e que a differença $F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0)$ seja differente de zero, o que dá o seguinte:

THEOREMA. — *Se as funcções $F(x)$ e $f(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n+1$, continuas no ponto x_0 , são condições necessarias e suficientes para que as curvas consideradas tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de ordem n , que x_0 satisfaça ás equações*

$$(1) \quad F(x) = f(x), \quad F'(x) = f'(x), \quad \dots, \quad F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x),$$

e que $F^{(n+1)}(x_0)$ seja differente de $f^{(n+1)}(x_0)$.

I. Resulta ainda d'estas egualdades e da precedente que a differença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$

tem o mesmo signal, na visinhança do ponto (x_0, y_0) , qualquer que seja o signal de h , quando n é impar, e que muda n'este ponto de signal com h , quando n é par. Logo, quando duas curvas têm um contacto de ordem par no ponto (x_0, y_0) , cruzam-se n'este ponto, e, quando têm um contacto de ordem impar, tocam-se, sem se cruzar.

II. Se, tomando para variavel independente uma quantidade t , as curvas forem representadas pelas equações $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $Y = \pi(t)$, as equações de condição a que deve satisfazer o valor que tem t no ponto (x_0, y_0) , para que as curvas tenham n'este ponto um contacto de ordem n , são, representando por x' , y' , Y' , x'' , y'' , Y'' , ... as derivadas de x , y e Y relativamente a t ,

$$y = Y, \frac{y'}{x'} = \frac{Y'}{x'}, \frac{y'x'' - x'y''}{x'^3} = \frac{Y'x'' - x'Y''}{x'^3}, \dots,$$

e portanto

$$y = Y, y' = Y', y'' = Y'', \dots, y^{(n)} = Y^{(n)}.$$

Como corollario d'estas egualdades resulta que a ordem do contacto de duas curvas é independente dos eixos das coordenadas a que estão referidas. Representando, com effeito, por x_1 e y_1 as novas coordenadas e por $y_1 = f_1(x_1)$ e $Y_1 = F_1(x_1)$ as novas equações das curvas, as equações precedentes dão, pondo $t = x_1$,

$$F_1(x_1) = f_1(x_1), F_1'(x_1) = f_1'(x_1), \dots, F_1^{(n)}(x_1) = f_1^{(n)}(x_1).$$

132. Seja $y = f(x)$ a equação de uma curva dada e $Y = F(x)$ uma equação com $n+1$ parametros arbitrarios, que representa uma familia de curvas. A curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada no ponto (x_0, y_0) diz-se *osculadora* da curva $y = f(x)$ n'este ponto. Para obter esta curva, deve-se dispôr dos $n+1$ parametros de modo que sejam satisfeitas as $n+1$ equações de condição (1), e a ordem do seu contacto com a proposta será igual ou superior a n , segundo a differença entre $f^{(n+1)}(x_0)$ e $F^{(n+1)}(x_0)$ for differente de zero ou igual a zero.

133. A doutrina precedente, devida a Lagrange, vae-nos apresentar, debaixo de um novo ponto de vista, alguns dos resultados obtidos no Capitulo III.

I. Se quizermos achar a *recta osculadora* da curva $y = f(x)$ no ponto (x, y) , temos de determinar as constantes A e B , que entram na equação

$$Y = AX + B$$

da recta, de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de primeira ordem

$$y = Ax + B, \quad y' = A.$$

A equação da recta pedida é pois

$$Y - y = y' (X - x),$$

e portanto esta recta coincide com a tangente á curva dada.

Por ser $Y'' = Y''' = \dots = 0$, a tangente tem com a curva proposta um contacto de segunda ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x) = 0$, $f'''(x) \leq 0$; um contacto de terceira ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, $f^{(4)}(x) \leq 0$; etc.

II. Se quizermos achar o *círculo osculador* da curva $y = f(x)$ no ponto (x, y) , temos de determinar as constantes arbitrárias a , b e R , que entram na equação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de segunda ordem

$$y = Y, \quad y' = Y', \quad y'' = Y'',$$

y' , y'' , Y' e Y'' representando as derivadas de primeira e segunda ordem de y e Y relativamente a x . As duas ultimas quantidades são dadas pelas equações

$$(x - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

$$x - a + (Y - b) Y' = 0,$$

$$1 + Y'^2 + (Y - b) Y'' = 0;$$

e porisso as condições consideradas reduzem-se ás seguintes:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

$$x - a + (y - b) y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y - b) y'' = 0.$$

D'estas equações tiram-se os valores das coordenadas a e b do centro e o valor do raio R do círculo osculador

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad a = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Da comparação d'estas fórmulas com as que dão as coordenadas do centro e o raio do circulo de curvatura (n.º 90-I) conclue-se que o circulo de curvatura e o circulo osculador, correspondentes ao mesmo ponto de uma curva dada, coincidem ⁽¹⁾.

Esta coincidência podia ser prevista. Com effeito, das equações $y=Y$, $y'=Y'$, $y''=Y''$ e das fórmulas (3) e (6) do n.º 90 conclue-se que os circulos de curvatura da curva dada e do seu circulo osculador no ponto (x, y) coincidem.

NOTA. Como na equação geral do circulo entram sómente tres constantes arbitrárias, o contacto do circulo osculador com uma curva é, em geral, de segunda ordem. Este contacto é de ordem superior á segunda sómente nos pontos que satisfazem á condição seguinte, que resulta de $y'''=Y'''$:

$$3y'y'' + (y-b)y''' = 0,$$

ou, eliminando $y-b$ por meio da ultima das equações precedentes,

$$3y''^2y' - (1+y'^2)y''' = 0.$$

134. Pontos de inflexão. — A determinação dos pontos de inflexão da curva $y=f(x)$ é facil de conseguir por meio do theorema do n.º 88-I. Com effeito, se $f''(x)$ é uma funcção continua no ponto x_0 , da egualdade

$$f''(x_0+h) = f''(x_0) + \varepsilon_1,$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com h , resulta que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto x_0 , é necessario que seja $f''(x_0)=0$. N'este caso, suppondo a funcção $f'''(x)$ finita no ponto x_0 , a egualdade (n.º 55)

$$f''(x_0+h) = h[f'''(x_0) + \varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h , mostra que $f''(x_0+h)$ muda de signal com h , e portanto que (x_0, y_0) é um ponto de inflexão, se $f'''(x_0)$ é differente de zero.

No caso de ser $f'''(x_0)=0$ e de a funcção $f^{(4)}(x)$ ser finita no ponto x_0 , a egualdade (n.ºs 55 e 64)

$$f''(x_0+h) = hf'''(x_0+\theta h) = \theta h^2[f^{(4)}(x_0) + \varepsilon_3]$$

⁽¹⁾ Lagrange deu a theoria geral dos contactos na sua notavel *Théorie des fonctions analytiques*, publicada em 1797. Antecedentemente tinha sido considerado por Newton e Leibnitz o circulo osculador, a proposito da theoria da curvatura das curvas planas. (Vej. a nota ao n.º 90).

mostra que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto (x_0, y_0) , é necessario que seja $f^{(4)}(x_0) = 0$. Logo, se esta egualdade não é satisfeita, (x_0, y_0) não é ponto de inflexão.

Continuando do mesmo modo, obtem-se a regra seguinte:

Para achar os pontos de inflexão de uma curva, cuja equação é dada, determinem-se x e y por meio da equação da curva e da equação $y'' = 0$.

Substitua-se depois cada grupo (x_0, y_0) de valores resultantes nas derivadas seguintes de y . Se a primeira derivada que não se annulla for de ordem impar, o ponto (x_0, y_0) é de inflexão, se for de ordem par, este ponto não é de inflexão.

Se as coordenadas (x_0, y_0) satisfazem á condição $y'' = 0$ e o ponto correspondente não é de inflexão, diz-se que é um *ponto de ondulação*.

Tanto nos pontos de inflexão como nos de ondulação, a tangente tem com a curva um contacto de ordem superior á primeira (n.º 133). Se a ultima derivada que é nulla n'este ponto é da ordem n , este contacto é tambem de ordem n .

EXEMPLOS. — 1.º Consideremos a curva cuja equação é

$$y = A \sin(ax + b) + B.$$

Teremos

$$y' = Aa \cos(ax + b), \quad y'' = -aA^2 \sin(ax + b);$$

e como os valores de x que annullam y'' são dados pela relação $ax + b = k\pi$, onde k representa um inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo, e como estes valores de x não annullam a terceira derivada

$$y''' = -Aa^3 \cos(ax + b),$$

$\left(\frac{-b + k\pi}{a}, B\right)$ são as cordenadas dos pontos de inflexão da curva considerada.

2.º A equação $y = x + (x - 1)^7$ dá

$$y' = 1 + 7(x - 1)^6, \quad y'' = 7 \cdot 6(x - 1)^5, \quad \dots, \quad y^{(7)} = 7!$$

Como o valor $x = 1$ annulla a derivada y'' , e como a primeira das derivadas seguintes que este valor de x não annulla é de ordem impar, o ponto $(1, 1)$ é de inflexão.

I. Se a curva dada for representada pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, t representando a variavel independente, os pontos de inflexão são dados (n.º 84) pela equação

$$x' y'' - y' x'' = 0,$$

x', x'', y', y'' representando as derivadas de x e y relativamente a t .

Pondo $t = \theta$, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, vem a equação seguinte:

$$\rho^2 - \rho \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + 2 \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = 0,$$

por meio da qual se determinam os pontos de inflexão e de ondulação, quando a curva dada é representada por uma equação $\rho = F(\theta)$, referida a coordenadas polares

II. Seja $F(x, y) = 0$ a equação de uma curva algebrica do grau m . Por ser

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0,$$

os seus pontos de inflexão são dados pela equação

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

a qual póde ainda ser escripta do modo seguinte

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto isto, escreva-se a equação da curva considerada debaixo da fórmula homogenea

$$F(x, y, z) = 0, \quad z = 1$$

como no n.º 86-V. Teremos (n.º 70)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z &= m F(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} z &= (m-1) \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} x + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} z &= (m-1) \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} x + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} y + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} z &= (m-1) \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned}$$

KK

Multiplicando agora respectivamente por x , y e $m-1$ as columnas do determinante anterior e subtrahindo depois de cada termo da ultima columna os termos do determinante que estão na mesma linha, vem, attendendo ás equações precedentes,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicando ainda por x , y e $m-1$ as linhas d'este determinante e subtrahindo depois de cada termo da ultima linha os termos do determinante que estão na mesma columna, vem finalmente a equação

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

á qual devem satisfazer as coordenadas dos pontos de inflexão da curva proposta.

Por serem as derivadas que entram n'esta equação funcções inteiras de x , y e z do grau $m-2$, vê-se que a equação é do grau 3 ($m-2$). Logo a curva representada por esta equação não póde cortar a curva proposta em mais de $3m(m-2)$ pontos e esta curva não póde ter portanto mais de $3m(m-2)$ pontos de inflexão. O theorema notavel que vimos de demonstrar é devido a O. Hesse, e porisso se dá a esta curva o nome de *hesseana* da curva dada.

135. No processo anterior para achar os pontos de inflexão, parte-se da hypothese que a derivada y'' é continua. Logo póde ainda haver outros pontos de inflexão em que esta derivada não exista ou seja discontinua. Além d'isso, se y'' é continua no ponto (x_0, y_0) , mas alguma das derivadas y''' , $y^{(4)}$, etc., a que é necessario recorrer, não existe ou é infinita n'este ponto, não se póde distinguir pelo processo anterior se o ponto (x_0, y_0) é ou não de inflexão. N'estes casos, para achar os pontos de inflexão, recorre-se principalmente ao theorema do n.º 88, por meio do qual se vê em que sentido está voltada a concavidade na visinhança do ponto considerado.

EXEMPLO 1.º A equação $y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}}$ dá

$$y' = \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}, \quad y'' = \frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

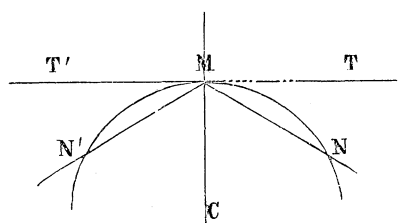
Como $x = a$ torna y'' infinita, vamos ver se o ponto (a, b) é ou não de inflexão. Para isso, notemos que y'' é positiva quando $x > a$, e que é negativa quando $x < a$; logo, á direita do ponto (a, b) está a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, e á esquerda d'este ponto está a concavidade voltada no sentido contrario, e o ponto é de inflexão (n.º 88).

EXEMPLO 2.º A equação $y = b + (x - a)^{\frac{7}{3}}$ dá

$$y'' = \frac{28}{9}(x - a)^{\frac{1}{3}}, \quad y''' = \frac{28}{27}(x - a)^{-\frac{2}{3}}.$$

No ponto (a, b) annulla-se y'' , mas y''' torna-se infinita, e o methodo anterior não é applicavel. Raciocinando porém como no exemplo anterior, conclue-se que o ponto é de inflexão.

136. *Pontos singulares das curvas planas.* — Chama-se *ponto ordinario* de uma curva plana o ponto M onde se reúnem dois arcos de curva, cujas secantes MN e MN' tendem para direcções oppostas da mesma tangente TT', quando N e N' tendem para M (fig. 1).



(Fig. 1)

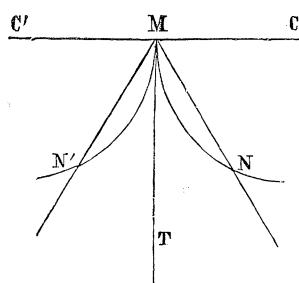
Os pontos que não estão n'estas condições chamam-se *singulares*. Mencionaremos os pontos seguintes:

- 1.º O *ponto de suspensão*, que é aquelle d'onde parte só um arco de curva.
- 2.º O *ponto anguloso*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas tangentes são diferentes.
- 3.º O *ponto isolado*, que é aquelle que está completamente separado do resto da curva.
- 4.º O *ponto de reversão de primeira especie*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para a mesma direcção MT da tangente, ficando uma de cada lado da tangente (fig. 2).
- 5.º O *ponto de reversão de segunda especie*, isto é, o ponto d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes tendem para a mesma direcção da tangente, ficando ambas do mesmo lado da tangente (fig. 3).

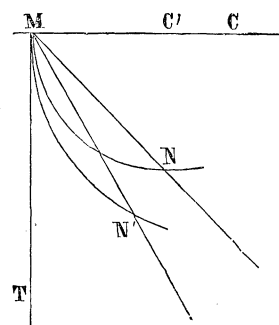
*

6.º O *nodo*, isto é, o ponto em que se cruzam dois ou mais arcos de curva.

Vejamos alguns exemplos de curvas em que se encontram os pontos singulares que vimos de mencionar.



(Fig. 2)



(Fig. 3)

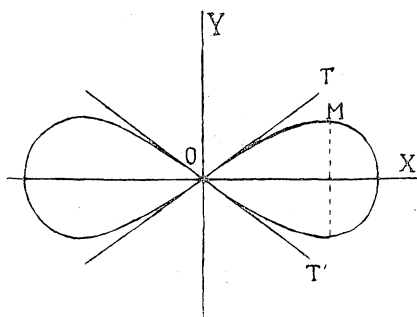
1.º Consideremos primeiramente a curva definida pela equação

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0,$$

a qual dá

$$y = \pm x \sqrt{1 - x^2}, \quad y' = \pm \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y'' = \pm \frac{x(2x^2 - 3)}{(1 - x^2)^{3/2}}.$$

Vê-se por meio d'estas equaldades que a curva tem a fórma indicada na figura juncta.



É symetrica relativamente aos eixos das coordenadas; tem um nodo em O, e as tangentes n'este ponto formam angulos de 45° com os eixos das coordenadas; tem quatro pontos onde o valor absoluto das ordenadas é maximo, correspondentes ás abscissas $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; e tem quatro pontos, correspondentes ás abscissas $x = 1$ e $x = -1$, onde a tangente é perpendicular ao eixo. Cada um dos arcos que se cruzam em O tem n'este ponto uma inflexão, e a curva não tem mais pontos de inflexão reaes.

2.º Consideremos em segundo logar a curva representada pela equação

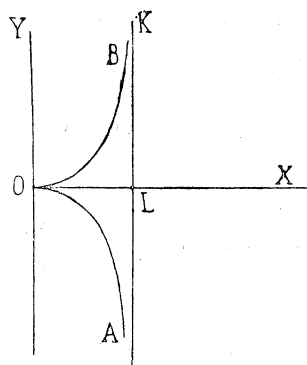
$$(a - x)y^2 = x^3,$$

á qual se dá o nome de *cissoide* de Diocles, por ter sido considerada na antiguidade por este geometra, e seja $a > 0$.

Temos

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}, \quad y' = \pm \frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2\sqrt{(a-x)^3}},$$

e, por meio d'estas equações, vê-se que a curva tem a fórma indicada na figura junta. É



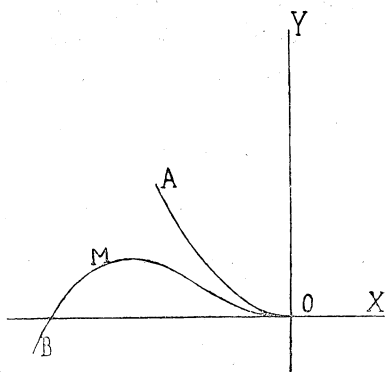
symetrica relativamente ao eixo das abscissas, ao qual é tangente no ponto O, e, como y é imaginario quando x é negativo, vê-se que tem em O um ponto de reversão de primeira especie; as suas ordenadas augmentam, quando x augmenta, e tendem para o infinito, quando x tende para a , sendo porisso a recta LK, cuja equação é $x=a$, asymptota da curva. Quando é $x > a$, y é imaginario.

.º No caso de ser dada a equação

$$y^2 - 2x^2 y + x^4 + x^5 = 0,$$

temos as egualdades

$$y = x^2 \pm x^2 \sqrt{-x}, \quad y' = 2x \pm \frac{5}{2}x \sqrt{-x}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{-x},$$



por meio das quaes se vê que a curva tem a fórma indicada na figura juncta. A cada valor

que se dá a x correspondem dois valores reaes para y e y' , quando $x < 0$, dois valores imaginarios, quando $x > 0$, e dois valores eguaes a zero, quando $x = 0$; logo a curva tem dois ramos, que se encontram no ponto O, onde são tangentes ao eixo das abscissas. Na vizinhança d'este ponto têm estes ramos a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto ser positiva a quantidade y'' , quando $x = 0$; e porisso a curva tem em O um ponto de reversão de segunda especie. O ramo inferior tem um ponto onde a ordenada é maxima, o qual corresponde ao valor $x = -\frac{16}{25}$ da abscissa, um ponto de inflexão, que corresponde a $x = -\frac{64}{225}$, e corta o eixo das abscissas no ponto onde $x = -1$.

4.º No caso de ser dada a equação

$$y^2 - x^3 + x^2 = 0,$$

temos

$$y = \pm x \sqrt{x-1}, \quad y' = \pm \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}},$$

e portanto a curva tem um ponto real na origem das coordenadas, e é imaginaria na vizinhança d'este ponto, que é porisso um *ponto isolado*, onde se cortam duas tangentes imaginarias conjugadas. Os outros pontos reaes da curva correspondem aos valores de x desde 1 até ∞ . Estes pontos formam um ramo, symetrico relativamente ao eixo das abscissas, que, partindo do ponto (1, 0), onde corta perpendicularmente este eixo, se estende até ao infinito, affastando-se constantemente dos dois eixos das coordenadas.

5.º Consideremos agora a curva transcendente representada pela equação

$$y \left(1 + x^{\frac{1}{x}} \right) = x.$$

Quando x tende para 0, y tende para 0, $\frac{y}{x}$ tende para 1, se $x < 0$, e tende para 0, se $x > 0$. Logo a curva tem na origem das coordenadas um *ponto anguloso*, e uma das tangentes coincide com o eixo das abscissas e a outra fórma um angulo de 45° com este eixo.

6.º Consideremos finalmente a curva representada pela equação

$$y = x \log x.$$

Como y é real, quando $x > 0$, é imaginario, quando $x < 0$, e tende para 0 (n.º 129-II), quando x tende para 0, vê-se que esta curva tem um *ponto de suspensão* na origem das coordenadas ⁽¹⁾.

(1) Podem vêr-se muitos exemplos de determinações de pontos singulares e diversos modos de os obter no nosso *Tratado de las curvas especiales notables*, já mencionado no n.º 91.

I. Supponhamos que $F(x, y) = 0$ é a equação da curva dada e que a função $F(x, y)$ tem um unico valor correspondente a cada grupo dos valores de x e y . Estão n'este caso as curvas algebraicas e tambem muitas curvas transcendentales.

A indagação dos pontos singulares d'estas curvas baseia-se no theorema seguinte, que é uma simples traducção geometrica do theorema 1.º do n.º 76:

Se a função $F(x, y)$ e as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ forem continuas, os pontos singulares da curva dada satisfazem ás equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Em virtude d'este theorema, para achar os pontos singulares da curva plana dada, devem procurar-se os valores de x e y que satisfazem á equação da curva e tornam as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ descontinuas ou nullas.

Seja (x_0, y_0) um systema d'estes valores. Para conhecer a especie do ponto singular (x_0, y_0) , procure-se quantos valores reaes tem y na visinhança do ponto considerado, para saber quantos arcos de curva se encontram n'este ponto, e depois, para cada arco, o valor que n'este ponto tem y' , para ver se os arcos que se encontram no ponto (x_0, y_0) têm ou não a mesma tangente, e o signal que tem y'' , para saber a direcção para onde está voltada a concavidade do arco (n.º 88). Estas questões resolvem-se facilmente quando a equação da curva pôde ser resolvida relativamente a y ou a x , como se viu nos exemplos precedentes.

II. Se a equação $F(x, y) = 0$ não poder ser resolvida relativamente a y ou a x , pôde-se determinar a fórmula da curva na visinhança dos pontos singulares por um methodo, devido a Newton, que vamos expôr succintamente.

Tome-se o ponto singular considerado para origem das coordenadas e seja $F_1(x, y) = 0$ a equação da curva, referida á nova origem.

Pondo n'esta equação $y = zx^a$, a representando uma constante positiva e z uma nova variavel dependente, teremos a egualdade $F_1(x, zx^a) = 0$. Determinando depois a de modo que em dois termos d'esta equação, pelo menos, tenha x o mesmo expoente e que este expoente seja menor do que o que tem x nos outros termos (o que se pôde fazer por tentativas⁽¹⁾), egualando os expoentes de x dois a dois e regeitando os valores de a que forem negativos ou levarem a resultados que não satisfaçam á condição precedente) e, substituindo este valor de a na equação $F_1(x, zx^a) = 0$, virá, para determinar z , uma equação da forma $F_2(x, z) = 0$.

Sejam z_1, z_2, \dots as raizes reaes da equação $F_2(0, z) = 0$, e supponhamos que $\frac{\partial F_2(x, z)}{\partial z}$

(1) Newton indicou, debaixo de fórmula geometrica, um methodo regular para resolver esta questão, ao qual Minding deu fórmula algebraica em um trabalho publicado no tom. xxii do *Jornal de Crelle*.

é diferente de zero nos pontos $(x=0, z=z_1, z_2, \dots)$, unico caso que aqui será estudado. N'este caso z é (n.º 76) uma função real de x , na vizinhança de cada um d'estes pontos, que admite derivadas finitas de todas as ordens; póde portanto, na vizinhança do ponto $(x=0, z=z_i)$, ser desenvolvida pela fórmula de Maclaurin, o que dá

$$z = z_i + z'_i x + \frac{1}{2} z''_i x^2 + \dots,$$

representando por z'_i, z''_i, \dots os valores que tomam z', z'', \dots no ponto $(x=0, z=z_i)$.

Temos depois

$$y = x^a \left(z_i + z'_i x + \frac{1}{2} z''_i x^2 + \dots \right).$$

Derivando duas vezes esta equação relativamente a x , obtêm-se duas equações, por meio das quaes se determinam o valor de y' no ponto $(x=0, y=0)$ e o signal de y'' na vizinhança d'este ponto, e portanto a tangente n'este ponto ao ramo da curva, correspondente á raiz z_i considerada, e a direcção para onde este ramo volta a concavidade na sua vizinhança.

Considerando todos os ramos da curva, correspondentes aos números z_1, z_2, \dots , conhece-se a forma da curva na vizinhança do ponto singular considerado ⁽¹⁾.

EXEMPLO. A curva representada pela equação

$$y^2 - x^2 + x^3 - y^3 + y^4 = 0$$

tem na origem das coordenadas um ponto singular. Para determinar a forma da curva na vizinhança d'este ponto, ponha-se $y = zx^a$, o que dá

$$z^2 x^{2a} - x^2 + x^3 - z^3 x^{3a} + z^4 x^{4a} = 0;$$

portanto temos primeiramente, para determinar a , a equação $2a=2$, que dá $a=1$, e depois, para determinar z , a equação

$$z^2 - 1 + (1 - z^3)x + z^4 x^2 = 0.$$

Pondo $x=0$ n'esta equação e suas derivadas, vem

$$z = 1, \quad z' = 0, \quad z'' = -1, \dots$$

$$z = -1, \quad z' = 1, \quad z'' = -1, \dots$$

⁽¹⁾ O problema que tem por objecto a indagação dos pontos singulares das curvas planas foi estudado por L'Hopital, De Gua, Euler, etc. Cramer occupou-se d'elle com largueza na sua *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, onde se póde estudar desenvolvidamente o methodo que vem de ser indicado.

Na vizinhança do ponto $(x=0, y=0)$ temos pois

$$y = x \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots \right), \quad y = x \left(-1 + x - \frac{1}{2} x^2 + \dots \right),$$

o que mostra que no ponto considerado se cortam dois ramos da curva, cujas tangentes fazem ângulos de 45° com o eixo das abscissas, e que o primeiro d'estes ramos tem n'este ponto uma inflexão.

137. Pontos multiplos. — Consideremos ainda a curva cuja equação é $F(x, y) = 0$ e o ponto (x_0, y_0) d'esta curva, e supponhamos que a função $F(x, y)$ admite derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a x e a y , continuas no ponto (x_0, y_0) . Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0) , este ponto diz-se *simples*.

Supponhamos agora que $F(x, y)$ admite as derivadas $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, continuas no ponto (x_0, y_0) . Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0) e as derivadas de primeira ordem $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são nullas n'este ponto, diz-se que o ponto (x_0, y_0) é *duplo*.

Em geral, supponhamos que as derivadas parciaes da função $F(x, y)$ até á ordem n são todas continuas no ponto (x_0, y_0) . Se uma, pelo menos, das derivadas de ordem n não é nulla no ponto (x_0, y_0) e se as derivadas de ordem inferior a n são todas nullas n'este ponto, diz-se que (x_0, y_0) é um ponto *multiplo*, cujo grau de multiplicidade é n .

Supponhamos que a equação proposta é algebrica e do grau m , e que $f(x, y) = 0$ é outra equação algebrica do grau m' , cujos coefficients são constantes arbitrarías, excepto um, que é determinado pela condição de a curva passar pelo ponto (x_0, y_0) . Supponhamos tambem que se excluem dos valores dados a estas constantes aquelles que annullam $f_y(x_0, y_0)$. A equação $f(x, y) = 0$ determina y como função de x , na vizinhança do ponto x_0 , e esta função admite derivadas de todas as ordens (n.º 76-1.º). Temos pois, pondo $x - x_0 = h$, representando por $\varphi(x)$ esta função e attendendo á egualdade $F(x_0, y_0) = 0$,

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) \right] h \\ \quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \varphi''(x_0) \right] h^2 + \dots \end{cases}$$

Esta equação leva á determinação dos pontos em que se cortam as duas curvas consideradas na vizinhança de (x_0, y_0) , visto que determina h e depois as equações $x = x_0 + h$ e $y = \varphi(x)$ determinam as coordenadas d'estes pontos. Um d'elles é o ponto (x_0, y_0) .

Se (x_0, y_0) é um ponto simples da curva, uma das quantidades $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ é diferente de zero, e portanto a equação anterior tem, em geral, uma unica raiz igual a zero. Logo, em

LL

virtude de um theorema bem conhecido da theoria da eliminação algebrica, as curvas cortam-se, *em geral*, em $mm' - 1$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0) , e não podem cortar-se em maior numero de pontos.

Se (x_0, y_0) é um ponto duplo da curva, as quantidades $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ são nullas, e a equação precedente tem, em geral, duas raizes eguaes a zero. Logo as curvas consideradas cortam-se, *em geral*, em $mm' - 2$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0) , e não podem cortar-se em maior numero de pontos.

Continuando do mesmo modo, vê-se que, se (x_0, y_0) é um ponto multiplo, cujo grau de multiplicidade é n , as curvas consideradas cortam-se, *em geral*, em $mm' - n$ pontos, differentes do ponto (x_0, y_0) , e não podem cortar-se em maior numero de pontos.

Vê-se pois que, nas questões em que se procura o numero de pontos em que a curva cuja equação é $f(x, y) = 0$ corta a curva cuja equação é $F(x, y) = 0$, cada ponto duplo equivale a dois pontos simples, cada ponto triplo equivale a tres pontos simples, etc. Estas considerações têm uma importancia consideravel no *Calculo integral*.

A doutrina que precede tem ainda logar quando o ponto (x_0, y_0) é imaginario. Veremos, com effeito, n'outro logar que o theorema 1.º do n.º 76, que lhe serve de base, tem logar no caso das variaveis imaginarias.

I. É conveniente ainda observar que, no caso de (x_0, y_0) ser um ponto simples e $\varphi(x)$ satisfazer á condição

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) = 0,$$

a equação (1) dá para h dois valores eguaes a 0, e mostra portanto que n'este ponto estão reunidos dois pontos de intersecção das curvas consideradas. É facil de ver que esta equação coincide com a que exprime que as curvas têm um contacto de primeira ordem no ponto (y_0, y_0) .

Se, além d'esta equação, tiver logar a seguinte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0) + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi''(x_0) = 0,$$

no ponto (x_0, y_0) estão reunidos tres pontos de intersecção das curvas. É facil tambem vêr que esta equação coincide com a que exprime que as curvas consideradas têm um contacto de segunda ordem no ponto (x_0, y_0) .

Continuando do mesmo modo, vê-se que, se as curvas tiverem no ponto (x_0, y_0) um contacto de ordem p , n'este ponto estão reunidos $p + 1$ pontos de intersecção das curvas.

Supponhamos agora que (x_0, y_0) é um ponto duplo. N'este caso, se for

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0) = 0,$$

a equação (1) dá para h tres valores eguaes a 0; portanto n'este ponto estão reunidos tres pontos de intersecção das curvas consideradas.

Continuando do mesmo modo, acham-se as condições para que no ponto duplo (x_0, y_0) estejam reunidos quatro, cinco, etc. pontos de intersecção das curvas.

Estas considerações podem ser facilmente estendidas aos pontos triplos, quadruplos, etc.

II. Appliquemos as considerações precedentes ao caso de se cortar a curva $F(x, y) = 0$ pela recta $y - y_0 = A(x - x_0)$.

Se (x_0, y_0) é um ponto simples e a recta tem com a curva n'este ponto um contacto de ordem p , no ponto (x_0, y_0) estão reunidos $p + 1$ pontos de intersecção da recta com a curva.

Se (x_0, y_0) é um ponto duplo e tem logar a condição

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} A + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} A^2 = 0,$$

no ponto (x_0, y_0) estão reunidos tres pontos de intersecção da recta com a curva. Esta equação dá dois valores para A , aos quaes correspondem duas rectas que satisfazem á condição precedente e que são determinadas pela equação

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} (x - x_0) (y - y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} (y - y_0)^2 = 0,$$

que resulta de eliminar A entre a ultima equação e a equação $y - y_0 = A(x - x_0)$. A estas rectas, cujos coefficients angulares coincidem com os valores que se obtêm para y' derivando duas vezes a equação $F(x, y) = 0$ relativamente a x e pondo no resultado $x = x_0$ e $y = y_0$, dá-se o nome de tangentes á curva no ponto duplo considerado. Estas tangentes coincidem quando as raizes da equação que determina A são eguaes.

Os pontos duplos que vimos de considerar dizem-se *ordinarios*, e dá-se o nome de *nodos* áquelles em que as tangentes são distinctas, e o de *pontos de reversão* áquelles em que estas tangentes coincidem, estendendo assim a significação d'estas palavras, anteriormente empregadas, de modo a considerar os pontos reaes e imaginarios, e as tangentes reaes e imaginarias das curvas.

Se algum dos valores de A annullar o coefficiente de h^3 em (1), no ponto (x_0, y_0) estão reunidos mais de tres pontos de intersecção da curva com a tangente correspondente ao valor de A considerado.

As tangentes á curva nos pontos triplos, quadruplos, etc., determinam-se do mesmo modo.

Estendendo a significação das palavras, *ponto singular*, empregadas no numero anterior para designar certos pontos *reaes*, dizem-se *singulares* todos os pontos multiplos das curvas consideradas, devendo ainda notar-se que alguns auctores abrangem n'esta designação tambem os pontos de inflexão e os de ondulação.

*

Suppozemos no que precede que a equação $F(x, y) = 0$ da curva dada é algebrica: é porém facil estender esta doutrina ao caso em que esta equação é transcendente, comtanto que a função $F(x, y)$ seja susceptível de ser desenvolvida segundo as potencias inteiras e positivas de $x - x_0$ e $y - y_0$.

138. Supponhamos agora que a curva dada é representada pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, que (x_0, y_0) são as coordenadas de um ponto d'esta curva, correspondente ao valor t_0 da variavel independente t , e que, na vesinhança d'este ponto, temos

$$x = x_0 + (t - t_0) \varphi'(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \varphi''(t_0) + \dots,$$

$$y = y_0 + (t - t_0) \psi'(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \psi''(t_0) + \dots$$

A recta representada pela equação

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

corta a curva considerada nos pontos correspondentes aos valores do t dados pela equação

$$(t - t_0) [A\varphi'(t_0) + B\psi'(t_0)] + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 [A\varphi''(t_0) + B\psi''(t_0)] + \dots = 0,$$

a qual mostra que em (x_0, y_0) estão reunidos dois, pelo menos, d'aquelles pontos, quando é satisfeita a condição

$$A\varphi'(t_0) + B\psi'(t_0) = 0.$$

N'este caso a recta tem para equação

$$(x - x_0) \psi'(t_0) - (y - y_0) \varphi'(t_0) = 0$$

e é tangente á curva no ponto (x_0, y_0) .

Se porém for $\varphi'(t_0) = 0$ e $\psi'(t_0) = 0$, todas as rectas que passam pelo ponto considerado têm duas das suas intersecções com a curva reunidas n'aquelle ponto, exceptuando aquella cujos coefficients satisfazem á condição

$$A\varphi''(t_0) + B\psi''(t_0) = 0,$$

a qual tem, pelo menos, tres das suas intersecções com a curva reunidas no referido ponto.

N'este caso o ponto (x_0, y_0) é *singular*, e a recta representada pela equação

$$(x - x_0) \phi''(t_0) - (y - y_0) \varphi''(t_0) = 0$$

é a tangente á curva n'este ponto.

É facil continuar esta discussão.

Assim, por exemplo, no caso da cycloide, cujas equações são (n.º 91-III)

$$x = r(t - \text{sen } t), \quad y = r(1 - \cos t).$$

Por ser

$$x' = r(1 - \cos t), \quad y' = r \text{sen } t,$$

$$x'' = r \text{sen } t, \quad y'' = r \cos t,$$

vê-se que a curva tem um ponto singular correspondente a $t=0$, e que a equação da tangente n'este ponto é $x=0$, como já se sabia.

139. Transformações algebricas. — Duas curvas dizem-se *transformadas* uma da outra quando os pontos das duas curvas estão ligados de tal modo que, sendo dada uma, a outra fica determinada. Se esta ligação é estabelecida por meio de relações algebricas entre as coordenadas dos dois pontos, a transformação diz-se *algebrica*. O estudo desenvolvido d'estas transformações, que deu origem a bellos e importantes trabalhos de Poncelet, Chasles, Cremona, Lie, etc., deve ser feito nas obras especialmente consagradas á Geometria. Aqui vamos apenas dar algumas indicações succintas sobre duas d'ellas que têm maior importancia.

I. A primeira transformação que vamos considerar, conhecida pela designação de *homographica*, é aquella em que as coordenadas (x, y) e (X, Y) de dois pontos correspondentes das duas curvas (l) e (l') estão ligados pelas relações

$$X = \frac{ax + by + c}{px + qy + r}, \quad Y = \frac{a'x + b'y + c'}{px + qy + r}.$$

Esta transformação goza das seguintes propriedades fundamentaes:

1.º As variaveis (x, y) podem exprimir-se em função de (X, Y) por meio de relações que têm a mesma fórmula que as precedentes.

2.º A transformada de qualquer recta é outra recta.

3.º Se o ponto (x, y) de uma curva (l) tender para o ponto (x', y') , o ponto (X, Y) de (l') , correspondente a (x, y) , tende para o ponto correspondente a (x', y') , no caso de x' e y' não annullarem o denominador das expressões de X e Y .

Resulta do que precede que, se um ponto A de (l) tender para o ponto A₁, o ponto B da outra curva, correspondente ao primeiro, tende para o ponto B₁, correspondente ao

segundo, e as rectas AA_1 e BB_1 , tendem para as tangentes nos pontos A e A_1 ás duas curvas; e portanto que a tangente a (l') no ponto (X, Y) é a transformada da tangente a (l) no ponto (x, y) . Se (l) tiver em um ponto m tangentes, distintas ou coincidentes, a outra curva tem também, no ponto correspondente, m tangentes, distintas ou coincidentes, e os dois pontos são ambos multiplos de ordem m , e têm o mesmo numero de tangentes coincidentes.

Do mesmo modo, se uma recta cortar a curva (l) em n pontos, a sua transformada corta a outra curva em n pontos, correspondentes aos primeiros, que coincidem, quando os primeiros coincidirem. Logo aos pontos de inflexão e ondulação de (l) correspondem pontos da mesma natureza em (l').

A transformação que vimos de considerar tem uma representação geometrica muito notavel: cada curva é a perspectiva da outra, vista de um ponto convenientemente escolhido. Póde vêr-se uma demonstração muito simples d'esta proposição em uma nota collocada no fim do nosso *Tratado de las curvas especiales notables*. Póde vêr-se no mesmo logar a demonstração de que a transformação que vimos de considerar, equivale á transformação de Newton:

$$Y = \frac{ay}{x}, \quad X = \frac{c}{x},$$

e a mudanças dos eixos das coordenadas a que estão referidas as duas curvas.

II. A segunda transformação que vamos considerar é aquella em que as coordenadas dos pontos das duas curvas estão ligadas pelas relações

$$X = \frac{m^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{m^2 y}{x^2 + y^2},$$

ou, em coordenadas polares, ρ e ρ_1 representando os vectores do ponto (x, y) e do ponto (X, Y) correspondente, para o mesmo valor do angulo θ que formam com o eixo,

$$\rho\rho_1 = m^2.$$

A esta transformação dá-se o nome de *transformação por raios vectores reciprocos*, a m^2 dá-se o nome de *módulo da transformação*, e cada uma das curvas diz-se *inversa* da outra.

Vamos indicar algumas propriedades fundamentaes d'esta transformação.

1.º A recta cuja equação é

$$AY + BX + C = 0$$

transforma-se na linha representada pela equação

$$m^2 (Ax + By) + C(x^2 + y^2) = 0,$$

isto é, em um circulo, quando C é differente de zero, em um recta, quando $C = 0$.

2.º O circulo cuja equação é

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = R^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

transforma-se no circulo representado pela equação

$$(R^2 - \alpha^2 - \beta^2)(x^2 + y^2) + 2m^2(ax + \beta y) - m^4 = 0,$$

quando $R^2 - \alpha^2 - \beta^2$ é diferente de zero, e em uma recta, no caso contrario.

3.º Os angulos formados pelos vectores dos pontos correspondentes das duas curvas com as tangentes respectivas são determinadas pelas fórmulas (n.º 86-IV)

$$\text{tang } \omega = \frac{\rho d\theta}{d\rho}, \quad \text{tang } \omega_1 = \frac{\rho_1 d\theta}{d\rho_1}.$$

Substituindo na ultima ρ_1 pelo valor dado pela equação $\rho\rho_1 = m^2$, vem

$$\text{tang } \omega_1 = -\frac{\rho d\theta}{d\rho} = -\text{tang } \omega.$$

Logo os dois vectores formam angulos eguaes com a recta que une os pontos correspondentes, ficando porém um de cada lado d'esta recta.

Como corollario do que precede conclue-se que, se duas curvas se cortam em um ponto A, as curvas inversas cortam-se no ponto correspondente B, e as tangentes ás segundas em B formam um angulo igual ao que formam as tangentes ás primeiras em A. Em particular, se duas curvas forem tangentes em A, as inversas são tangentes no ponto B correspondente.

4.º Viu-se já que, se (α, β) representam as coordenadas de um *fóco* de uma curva, as rectas representadas pelas equações

$$Y - \beta = \pm i(X - \alpha)$$

são tangentes á curva. Mas as equações das rectas inversas são

$$y - \frac{m^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \pm i\left(x - \frac{m^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right),$$

e estas rectas são tangentes á curva inversa. Logo os *fócos* de uma curva são os pontos *inversos* dos *fócos* de curva inversa.

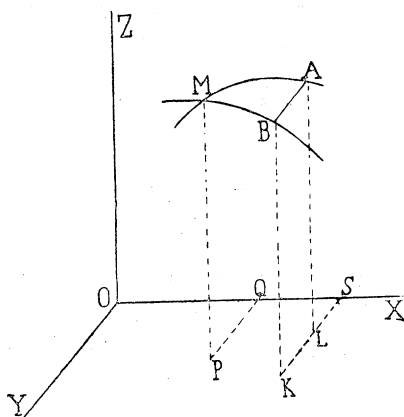
II

Curvas no espaço

140. *Contacto de duas curvas no espaço.* — Sejam

$$y = f(x), \quad z = f_1(x); \quad Y = F(X), \quad Z = F_1(X)$$

as equações de duas curvas no espaço, que se cortem no ponto M, cujas coordenadas são



(x_0, y_0, z_0) . A distancia BA, que representaremos por d , de dois pontos d'estas curvas, correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, é dada pela fórmula

$$d = \sqrt{[F(x_0 + h) - f(x_0 + h)]^2 + [F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h)]^2}.$$

Se d for infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h , diz-se que as curvas consideradas têm no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n . Vê-se, como no n.º 130, que n'este caso, na vizinhança do ponto dado, as curvas se approximam mais uma da outra do que de qualquer outra curva com a qual tenham um contacto de ordem inferior.

Procuramos as condições analyticas para que as curvas dadas tenham um contacto de ordem n no ponto considerado. Para isso, notemos que é condição necessaria e sufficiente para que d seja infinitamente pequeno de ordem $n + 1$, relativamente a h , que as diferenças

$$\alpha = F(x_0 + h) - f(x_0 + h), \quad \beta = F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h)$$

o sejam, ou que uma seja de ordem $n + 1$ e a outra de ordem superior. Com effeito, suppondo

que uma das diferenças é da ordem $n+1$ e que a outra é da ordem $n+1+i$, temos (n.º 54)

$$\beta = h^{n+1}(A + \epsilon), \quad \alpha = h^{n+i+1}(B + \epsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas, diferentes de zero, e ϵ e ϵ' são quantidades infinitamente pequenas com h ; e portanto

$$d = h^{n+1} \sqrt{(A + \epsilon)^2 + h^{2i}(B + \epsilon')^2},$$

d'onde se deduz que d é da ordem $n+1$ relativamente a h .

Reciprocamente, se d for da ordem $n+1$ relativamente a h , uma das quantidades α ou β é da ordem $n+1$ e a outra é da mesma ordem ou de ordem superior; porque, se a que é de menor ordem fosse de ordem m diferente de $n+1$, também d seria da ordem m , em virtude do que vimos de demonstrar.

Para achar pois as condições analyticas do contacto de ordem n , basta exprimir que uma das quantidades α ou β é infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h e que a outra é da mesma ordem ou de ordem superior. Raciocinando para isso como no caso das curvas planas (n.º 131), acham-se as equações de condição

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x), f'(x) = F'(x), \dots, f^{(n)}(x) = F^{(n)}(x), \\ f_1(x) &= F_1(x), f'_1(x) = F'_1(x), \dots, f^{(n)}_1(x) = F^{(n)}_1(x), \end{aligned}$$

a que deve satisfazer x_0 .

Vê-se também, como no caso das curvas planas, que, se tomarmos para variavel independente uma nova variavel t , o que dá $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \pi(t)$, $Y = \theta(t)$ e $Z = \tau(t)$, as equações de condição para o contacto de ordem n são

$$\begin{aligned} y &= Y, y' = Y', \dots, y^{(n)} = Y^{(n)}, \\ z &= Z, z' = Z', \dots, z^{(n)} = Z^{(n)}, \end{aligned}$$

y' , z' , Y' , Z' , etc. representando as derivadas de y , z , Y , Z relativamente a t .

Se uma das curvas for completamente dada e as equações $Y = F(X)$, $Z = F_1(X)$ representarem uma familia de curvas, a curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada, diz-se *osculadora* da primeira. Para obter esta curva, devem-se determinar os parametros arbitrarios que entram nas equações $Y = F(X)$ e $Z = F_1(X)$, cujo numero suporemos igual a $2(n+1)$, por meio das equações de condição precedentes.

I. Appliquemos os principios anteriores á linha recta, isto é, procuremos a recta que passa

MM

pelo ponto (x, y, z) da curva representada pelas equações $y=f(x)$ e $z=f_1(x)$ e que tem um contacto de ordem a mais elevada possível com esta curva.

As equações da recta são da forma $Y=AX+B$, $Z=CX+D$, e podemos portanto determinar as quatro constantes A , B , C e D de modo a satisfazer ás quatro equações necessárias para o contacto de primeira ordem:

$$y = Ax + B, \quad z = Cx + D, \quad f'(x) = A, \quad f_1'(x) = C.$$

Logo as equações da recta pedida são

$$Y - y = f'(x)(X - x), \quad Z - z = f_1'(x)(X - x),$$

e a recta coincide portanto com a tangente á curva no ponto (x, y, z) (n.º 92).

O contacto da curva com a tangente é de primeira ordem, excepto nos pontos que satisfazem ás equações $f''(x) = 0$ e $f_1''(x) = 0$, onde é de ordem superior á primeira.

II. Procuremos em segundo logar o *círculo osculador* da curva representada pelas equações $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ e $z=\pi(t)$ no ponto (x, y, z) .

Como toda a circumferencia póde resultar da intersecção de uma esphera com um plano que passe pelo seu centro (a, b, c) , póde esta curva ser representada pelas equações

$$\begin{aligned} (X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 &= R^2, \\ \alpha(X-a) + \beta(Y-b) + \gamma(Z-c) &= 0. \end{aligned}$$

N'estas equações ha seis constantes arbitrárias distinctas, que vamos determinar de modo a satisfazer ás seis equações necessárias para que a circumferencia e a curva tenham um contacto de segunda ordem no ponto (x, y, z) , isto é, ás equações seguintes:

$$(b) \quad \begin{cases} \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = 0, \\ \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0, & \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' = 0, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \\ (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0, \\ (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' + s'^2 = 0, \end{cases}$$

onde se representa por s'^2 a somma $x'^2 + y'^2 + z'^2$.

Eliminando α , β e γ entre a segunda, a terceira das equações precedentes e a equação

$$\alpha(X-a) + \beta(Y-b) + \gamma(Z-c) = 0,$$

vem a equação

$$(z' y'' - y' z'') (X - x) + (x' z'' - z' x'') (Y - y) + (y' x'' - x' y'') (Z - z) = 0$$

que pertence (n.º 92-IV) ao plano osculador da curva no ponto (x, y, z) . Logo o *círculo osculador em um ponto da curva está no plano osculador da curva, correspondente ao mesmo ponto*.

Como o ponto (a, b, c) está no plano anterior, temos a equação

$$(z' y'' - y' z'') (x - a) + (x' z'' - z' x'') (y - b) + (y' x'' - x' y'') (z - c) = 0,$$

e, em seguida, eliminando a, b e c entre ella e as duas ultimas equações (b),

$$a = x - \frac{(Bz' - Cy') s'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad b = y - \frac{(Cx' - Az') s'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad c = z - \frac{(Ay' - Bx') s'^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

pondo, como no n.º 93,

$$A = z' y'' - y' z'', \quad B = x' z'' - z' x'', \quad C = y' x'' - x' y''.$$

As fórmulas precedentes determinam as coordenadas do centro do círculo osculador.

Substituindo agora os valores de $x - a, y - b, z - c$ na terceira das equações (b) e attendendo á egualdade

$$\begin{aligned} & (Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Az')^2 + (Ay' - Bx')^2 \\ &= (A^2 + B^2 + C^2) s'^2 - (Ax' + By' + Cz') = (A^2 + B^2 + C^2) s'^2, \end{aligned}$$

vem a fórmula

$$R = \frac{s'^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o raio do círculo osculador. Da comparação d'esta fórmula com a que dá (n.º 93-I) o raio de curvatura, conclue-se que *o raio do círculo osculador de uma curva em um ponto dado é igual ao raio de curvatura da curva no mesmo ponto*.

Ao círculo que vimos de considerar dá-se também o nome de *círculo de curvatura* e ao seu centro o de *centro de curvatura* da curva considerada. As expressões das coordenadas (a, b, c) d'este ponto têm uma forma muito simples, quando se toma s para variavel independente. Substituindo, com effeito, A, B e C pelos seus valores nas fórmulas que determinam

*

aquellas quantidades e attendendo ás relações

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0,$$

vem

$$a = x + R^2 \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad b = y + R^2 \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad c = z + R^2 \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Á recta que une o ponto (x, y, z) da curva ao centro de curvatura correspondente chama-se *normal principal*. Á recta perpendicular ao plano osculador, tirada pelo ponto (x, y, z) , chama-se *binormal*. Adiante nos occuparemos outra vez d'estas rectas importantes.

141. Entre o circulo osculador da curva dada e a envolvente dos seus planos normaes existe uma relação importante que vamos considerar.

A equação do plano normal á curva dada no ponto (x, y, z) é (n.º 92-III)

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0,$$

e portanto a equação da superficie envolvente das posições que toma este plano, quando t varia, é dada pela eliminação de t entre a equação precedente e a seguinte:

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' = s'^2.$$

A caracteristica d'esta superficie que passa pelo ponto (x, y, z) é representada por estas duas equações e esta caracteristica é portanto perpendicular ao plano

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

quando entre A, B e C existem as relações

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

isto é, ao plano osculador da curva dada no ponto considerado.

Comparando as equações da mesma caracteristica com as duas ultimas equações (b), vê-se que esta recta passa pelo centro (a, b, c) do circulo osculador.

Temos pois o theorema seguinte:

As rectas perpendiculares aos planos osculadores de uma curva, tirados pelos centros dos circulos osculadores, formam uma superficie planificavel, que coincide com a superficie envolvente dos planos normaes á mesma curva.

Este theorema é devido a Monge, que foi quem primeiro considerou esta superfície, á qual deu o nome de *superfície polar*.

As equações da aresta de reversão da superfície polar são as seguintes:

$$\begin{aligned}(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' &= 0, \\ (X-x)x'' + (Y-y)y'' + (Z-z)z'' &= s'^2, \\ (X-x)x''' + (Y-y)y''' + (Z-z)z''' &= 3s's'',\end{aligned}$$

que determinam as coordenadas (X, Y, Z) dos seus pontos em função da variavel t .

III

Superfícies

142. *Contacto de uma curva com uma superfície.* — Sejam

$$\begin{aligned}Z &= F(X, Y), \\ y &= \varphi(x), \quad z = \psi(x)\end{aligned}$$

as equações de uma superfície e de uma curva que se cortam em um ponto, e supponhamos que é da ordem n o contacto de ordem mais elevada que a curva dada tem com as curvas traçadas sobre a superfície. N'este caso diz-se que *a superfície e a curva têm no ponto considerado um contacto de ordem n* . É facil achar as equações de condição para que isto se dê.

Notemos para isso, primeiramente, que as equações de condição a que deve satisfazer a abscissa do ponto considerado para que a curva dada e a curva representada pelas equações $Z = F(X, Y)$, $Y = \varphi(X)$, a qual resulta de projectar a primeira sobre a superfície por meio de rectas paralelas ao eixo dos z , tenham n'este ponto um contacto de ordem n , são (n.º 140)

$$F[x, \varphi(x)] = \psi(x), \quad \frac{dF[x, \varphi(x)]}{dx} = \psi'(x), \dots, \quad \frac{d^n[x, \varphi(x)]}{dx^n} = \psi^{(n)}(x).$$

Notemos, em segundo logar, que as equações de condição a que deve satisfazer a abscissa do mesmo ponto, para que a curva tenha um contacto de ordem m com outra curva qualquer, collocada sobre a superfície, e representada pelas equações

$$Z = F(X, Y), \quad Y = \theta(X),$$

são

$$F[x, \theta(x)] = \phi(x), \quad \frac{dF[x, \theta(x)]}{dx} = \phi'(x), \quad \dots, \quad \frac{d^m F[x, \theta(x)]}{dx^m} = \phi^{(m)}(x),$$

$$\theta(x) = \varphi(x), \quad \theta'(x) = \varphi'(x), \quad \dots \quad \theta^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x).$$

Basta agora attender a que as equações contidas na primeira linha coincidem (em virtude das que entram na segunda) com as equações que exprimem que o contacto da curva dada com a curva especial primeiramente considerada é da ordem m , para concluir que m não póde ser superior a n .

As condições a que deve satisfazer a abscissa de um ponto da curva dada, para que n'elle tenha um contacto de ordem n com a superficie, coincidem pois com as que exprimem que a curva tem um contacto de ordem n com a que resulta de a projectar sobre a superficie por meio de rectas parallelas ao eixo dos z ; e, pondo $F[x, \varphi(x)] = f(x)$, podem ser escriptas do modo seguinte:

$$f(x) = \phi(x), \quad f'(x) = \phi'(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \phi^{(n)}(x).$$

Se, tomando t para variavel independente, for $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $z = \pi(t)$, vê-se como no n.º 131 que temos, pondo $F[\varphi(t), \phi(t)] = f(t)$,

$$f(t) = \pi(t), \quad f'(t) = \pi'(t), \quad \dots, \quad f^{(n)}(t) = \pi^{(n)}(t).$$

Logo, para achar as condições do contacto de ordem n da curva com a superficie, basta substituir na equação da superficie X , Y e Z por x , y e z , formar depois as derivadas da equação resultante, relativamente a t , até á ordem n , e substituir finalmente n'estas equações t pelo valor que tem esta quantidade no ponto considerado.

Se a curva for completamente dada assim como a especie da superficie, a superficie da especie considerada que tem com a curva um contacto de ordem mais elevada no ponto (x, y, z) , diz-se *osculadora* da curva n'este ponto. Para achar esta superficie, basta determinar as constantes arbitrarías, cujo numero suporemos igual a $n+1$, que entram na equação $Z = (X, Y)$, de modo que as $n+1$ condições precedentes sejam satisfeitas.

I. Procuremos a equação do *plano osculador* da curva $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $z = \pi(t)$ no ponto (x, y, z) . Temos para isso de determinar as constantes que entram na equação

$$AX + BY + CZ = D$$

de modo que sejam satisfeitas as equações de condição

$$Ax + By + Cz = D, \quad Ax' + By' + Cz' = 0, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

onde x' , y' , etc. representam as derivadas de x , y e z relativamente a t ; o que leva a uma equação que coincide com a equação (5) do n.º 92-IV, justificando assim a designação que foi dada ao plano estudado n'esse numero.

O plano osculador tem com a curva um contacto de segunda ordem, excepto no caso de as coordenadas do ponto satisfazerem á condição que resulta de eliminar A, B e C entre as equações precedentes e a seguinte:

$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0,$$

isto é, á condição

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Os planos osculadores da curva n'estes pontos, onde a torsão é nulla, dizem-se *estacionários*.

II. Consideremos ainda a esphera osculadora da mesma curva.

Temos, para a obter, de determinar as constantes α , β , γ e ρ , que entram na equação

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = \rho^2,$$

por meio das relações

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \rho^2$$

$$(x - \alpha)x' + (y - \beta)y' + (z - \gamma)z' = 0,$$

$$(x - \alpha)x'' + (y - \beta)y'' + (z - \gamma)z'' = -s'^2,$$

$$(x - \alpha)x''' + (y - \beta)y''' + (z - \gamma)z''' = -3s's''.$$

Comparando estas equações com as que determinam (n.º 141) a aresta de reversão da superficie polar da curva dada, vê-se que α , β e γ satisfazem a estas equações. Logo *o logar dos centros das espheras osculadoras coincide com a aresta de reversão da superficie polar*.

Quando $t = s$, as coordenadas (α, β, γ) do centro da esphera osculadora no ponto (x, y, z) da curva são determinadas pelas equações

$$\alpha = x - \frac{y'z''' - z'y'''}{D}, \quad \beta = y - \frac{z'x''' - x'z'''}{D}, \quad \gamma = z - \frac{x'y''' - y'x'''}{D},$$

onde D representa o determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

O raio ρ da esphera considerada é dado pela fórmula

$$\rho^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')}{D^2}.$$

143. *Contacto de duas superficies.* — Sejam

$$z = f(x, y), \quad Z = F(X, Y)$$

as equações de duas superficies que se cortam no ponto (x, y, z) e

$$Y - y = A(X - x)$$

a equação de um plano arbitrario, tirado por este ponto perpendicularmente ao plano xy .

Se as duas curvas que este plano determina pela sua intersecção com as superficies têm um contacto de ordem n no ponto considerado, qualquer que seja a posição do plano, diz-se que *as duas superficies têm no ponto (x, y, z) um contacto de ordem n .*

Para obter as condições a que devem satisfazer as coordenadas do ponto dado para que isso tenha logar, basta notar que as condições para o contacto de ordem n das curvas correspondentes a um valor determinado de A , são

$$F(x, y) = f(x, y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} A = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} A,$$

.....

Devendo estas equações ter logar qualquer que seja o valor de A , conclue-se que *as condições para que as duas superficies tenham um contacto de primeira ordem no ponto (x, y, z) são*

$$F(x, y) = f(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y};$$

que as condições para que as duas superfícies tenham um contacto de segunda ordem no ponto (x, y, z) são, além das precedentes, as seguintes:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

e assim successivamente.

144. Uma superfície de especie dada $Z = F(X, Y)$ diz-se *osculadora* de uma superfície dada $z = f(x, y)$, se a primeira tem com a segunda o contacto de ordem mais elevada que as superfícies da especie considerada podem ter com a superfície dada. Se a superfície $Z = F(X, Y)$ contem m constantes arbitrárias, podemos determinar estas constantes de modo que as superfícies tenham, em geral, um contacto de ordem n , se m for egual ao numero de equações necessarias para haver contacto de ordem n . Se for menor, póde estabelecer-se só um contacto de ordem inferior a n , e a equação fica ainda com algumas constantes arbitrárias.

I. A equação $Z = AX + BY + C$ contendo tres constantes arbitrárias, póde o plano ter um contacto de primeira ordem com a superfície $z = f(x, y)$. Para achar o plano que satisfaz a esta condição, determinem-se as constantes arbitrárias por meio das tres equações de condição para haver contacto de primeira ordem, que dão

$$z = Ax + By + C, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial y};$$

portanto a equação do *plano osculador* da superfície é

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y),$$

e coincide com a equação do plano tangente (n.º 94).

II. Consideremos, em segundo logar, a esphera

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Podemos dispôr de tres das constantes arbitrárias que contem esta equação, de modo a satisfazer ás tres equações de condição necessarias para que esta superfície tenha um contacto de primeira ordem com a superfície $z = f(x, y)$.

Para obter um contacto de segunda ordem, é necessario que a equação da superfície $Z = F(X, Y)$ contenha seis constantes arbitrárias, e portanto a esphera não póde ter um contacto de segunda ordem com a superfície dada, excepto em alguns pontos particulares d'esta superfície, como vamos ver.

NN

Para haver contacto de segunda ordem, os valores de Z , $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$, tirados da equação da esfera e das equações

$$\begin{aligned} X - a + (Z - c) \frac{\partial Z}{\partial X} &= 0, \quad Y - b + (Z - c) \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0, \\ 1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} &= 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \right)^2 + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} &= 0, \end{aligned}$$

devem ser eguaes respectivamente a $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, quando n'ellas se faz $X = x$ e $Y = y$, o que dá as equações de condição

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 &= R^2, \\ x - a + (z - c) \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \quad y - b + (z - c) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (z - c) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + (z - c) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + (z - c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

As quatro primeiras equações servem para determinar as constantes arbitrarías a , b , c e R . As duas ultimas, eliminando $z - c$ por meio da quarta, dão as equações

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

a que deve satisfazer o ponto (x_0, y_0, z_0) da superficie $z = f(x, y)$, para que n'elle a superficie possa ter uma esfera osculadora.

Tomando o ponto (x_0, y_0, z_0) para origem das coordenadas, o plano tangente para plano dos xy e os planos das secções principaes para planos dos xz e yz , e chamando $z = f_1(x, y)$ a nova equação da superficie, as equações precedentes dão [representando por p_0 , q_0 , r_0 , s_0 e t_0 os valores que tomam as derivadas $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$ no ponto $(0, 0, 0)$] $r_0 = t_0$, $s_0 = 0$, visto ser (n.º 95) $p_0 = 0$ e $q_0 = 0$. Mas as curvaturas c_1 e c_2 das secções principaes

que passam pelo ponto $(0, 0, 0)$ são (n.º 95) dadas pelas fórmulas $c_1=r_0$ e $c_2=t_0$. Portanto temos $c_1=c_2$; o que prova que os pontos em que a superfície tem um contacto de segunda ordem com uma esphera coincidem com os pontos umbilicaes (n.º 95).

Para um estudo mais desenvolvido e profundo da theoria do cantacto, consulte-se o bello *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique de Paris* de Hermite.

145. Pontos singulares das superficies. — Consideremos a superfície representada pela equação $f(x, y, z)=0$ e um ponto (x_0, y_0, z_0) situado sobre ella, e applicando a fórmula de Taylor, escrevamos esta equação debaixo da fórma

$$\begin{aligned} & f'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) \\ & + \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)^2 + \dots] \\ & + \dots = 0. \end{aligned}$$

A recta representada pelas equações

$$y-y_0 = A(x-x_0), \quad z-z_0 = B(x-x_0)$$

corta esta superfície em pontos cujas abscissas são determinadas pela equação

$$\begin{aligned} & (x-x_0) [f'_x(x_0, y_0, z_0) + A f'_y(x_0, y_0, z_0) + B f'_z(x_0, y_0, z_0)] \\ & + \frac{1}{2} (x-x_0)^2 [f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) + 2A f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) + A^2 f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) + \dots] \\ & + \dots = 0, \end{aligned}$$

um dos quaes coincide com (x_0, y_0, z_0) , a qual mostra que n'este ponto estão reunidas duas intersecções, pelo menos, da recta com a superfície, quando A e B satisfazem á condição

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) + A f'_y(x_0, y_0, z_0) + B f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Eliminando A e B entre esta equação e as da recta, vê-se que todas as rectas que satisfazem á condição indicada estão situadas no plano representado pela equação

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0,$$

isto é, no plano tangente (n.º 94) á superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) .

Se porém for

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

*

não existe plano tangente, e todas as rectas que passam pelo ponto considerado têm duas, pelo menos, das suas intersecções com a superfície reunidas no ponto (x_0, y_0, z_0) .

Entre as rectas que, n'este caso, passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) convem notar aquellas cujos coefficients angulares satisfazem á condição

$$f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) + 2A f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) + A^2 f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) + \dots = 0,$$

as quaes têm tres das suas intersecções com a curva reunidas no ponto considerado. Eliminando A e B entre esta equação e as das rectas, obtem-se a equação

$$f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)^2 + \dots = 0,$$

a qual representa um *cone de segunda ordem*, que se diz *tangente á superfície* no ponto (x_0, y_0, z_0) . N'este caso o ponto (x_0, y_0, z_0) diz-se *duplo*.

Se todas as derivadas parciaes de primeira e de segunda ordem de $f(x, y, z)$ forem nullas no ponto (x_0, y_0, z_0) e alguma derivada de terceira o não for, o ponto diz-se *triplo*, e vê-se do mesmo modo que existe um cone de terceira ordem que é o logar geometrico de todas as rectas que têm, pelo menos, tres das suas intersecções com a superfície reunidas em (x_0, y_0, z_0) .

Em geral, se as derivadas parciaes de $f(x, y, z)$ até á ordem n forem todas nullas no ponto (x_0, y_0, z_0) e alguma das de ordem $n+1$ for differente de zero, este ponto diz-se *multiplo de ordem n*, e existe um cone de ordem n que é o logar geometrico das rectas que têm n , pelo menos, das suas intersecções com a superfície reunidas no referido ponto.

Os pontos multiplos e os pontos da superfície considerada em que a doutrina precedente não tem logar, por não lhe ser applicavel o desenvolvimento pela fórmula de Taylor de que se partiu, dizem-se *singulares*.

146. *Pontos singulares das curvas enviezadas.* — Consideremos a curva representada pelas equações $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ e um ponto (x_0, y_0, z_0) situado sobre ella, e escrevam-se estas equações do modo seguinte:

$$u_1 + u_2 + \dots = 0, \quad v_1 + v_2 + \dots = 0,$$

onde

$$u_1 = f'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0),$$

$$u_2 = \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)(y-y_0) + \dots],$$

e onde v_1, v_2, \dots representam as funções que se obtêm mudando nas expressões precedentes a letra f pela letra F .

Posto isto, viu-se no n.º 92 que a tangente á curva considerada no ponto (x_0, y_0, z_0) é

dada pelas equações $u_1 = 0$ e $v_1 = 0$, que representam os planos tangentes ás duas superficies que entram na sua definição. Se porém estes planos tangentes coincidem, o que tem logar quando (x_0, y_0, z_0) satisfaz ás condições

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0, z_0) : F'_x(x_0, y_0, z_0) &= f'_y(x_0, y_0, z_0) : F'_y(x_0, y_0, z_0) \\ &= f'_z(x_0, y_0, z_0) : F'_z(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

os dois planos não determinam recta alguma, e o ponto diz-se *singular*. Considerando então a superficie representada pela equação

$$u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \dots = 0,$$

a qual passa pela curva dada, o cone de segunda ordem representado pela equação

$$u_2 - v_2 = 0,$$

o qual é formado pelas rectas que têm tres, pelo menos, das suas intersecções com a superficie precedente reunidas em (x_0, y_0, z_0) , e o plano $u_1 = 0$, tangente ás superficies dadas, cortam-se segundo duas rectas que se dizem *tangentes* á curva, e o ponto diz-se *duplo*.

Se for tambem $u_2 = v_2$, o plano $u_1 = 0$ e o cone de terceira ordem representado pela equação $u_3 - v_3 = 0$ cortam-se segundo tres rectas, que se dizem *tangentes* á curva no ponto (x_0, y_0, z_0) , e este ponto diz-se *triplo*.

Não continuaremos esta discussão, que é facil, e terminaremos observando que a doutrina precedente só é applicavel ao ponto (x_0, y_0, z_0) quando os desenvolvimentos pela fórmula de Taylor de que se partiu têm logar n'este ponto.

CAPITULO VII

Funções definidas por series. Singularidades das funções

I

Funções definidas por series

147. Vamos n'este Capitulo estudar as funções definidas por series, para estabelecer as condições da sua continuidade e achar as suas derivadas. Em seguida formaremos, por meio d'estas funções, exemplos das singularidades mais importantes, relativamente á continuidade e ás derivadas, que as funções apresentam.

148. *Continuidade das funções definidas por series.* — A este respeito vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. *Se a serie*

$$(1) \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

for uniformemente convergente em um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, a função $f(x)$ é continua nos pontos d'este intervallo em que as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. são continuas.

Seja a um d'estes pontos. Por ser uniformemente convergente a serie anterior, a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde (n.º 26) um numero m tal que será

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a) \right| < \frac{\delta}{3}, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a+h) \right| < \frac{\delta}{3},$$

qualquer que seja o valor de h , com a condição de $a+h$ pertencer ao intervallo considerado.

Mas, por ser continua no ponto a a somma (n.º 36)

$$P_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x),$$

póde-se sempre dar a ε um valor positivo tal que a desigualdade

$$|P_m(a+h) - P_m(a)| < \frac{1}{3} \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < \varepsilon$ (n.º 36-1.º).

D'estas desigualdades e da egualdade

$$f(a+h) - f(a) = P_m(a+h) - P_m(a) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a+h) - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a)$$

conclue-se pois que, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a δ , ha sempre um valor de ε tal que a desigualdade

$$|f(a+h) - f(a)| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < \varepsilon$. Logo a funcção é continua no ponto a .

149. *Derivadas das funcções definidas por series.* — Principiaremos o que temos a dizer sobre as derivadas das funcções definidas por series, fazendo notar que as series cujos termos são as derivadas dos termos de uma serie convergente, póde ser divergente. Assim a serie $\Sigma (-1)^n \frac{x^n}{n}$ é convergente quando é $x=1$, em quanto que a serie $\Sigma (-1)^n x^{n-1}$, formada pelas derivadas dos seus termos, é n'este caso divergente. Posto isto, vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. *Se a serie (1) for convergente em um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, e se no mesmo intervallo for uniformemente convergente a serie $\Sigma f'_n(x)$, formada pelas derivadas dos termos da precedente, a funcção $f(x)$ admite derivada e temos*

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

no intervallo considerado.

Seja a um valor qualquer de x , pertencente ao intervallo considerado, e ponhamos para brevidade

$$R(x) = \sum_{m=p+1}^{\infty} f_n(x), \quad R_1(x) = \sum_{m=p+1}^{\infty} f'_n(x).$$

Teremos

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) &= \sum_1^{m+p} \left[\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] + \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a) \\ &= \sum_1^m \left[\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] + \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)] + \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a), \end{aligned}$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Por ser uniformemente convergente a serie $\Sigma f'_n(x)$ no intervallo considerado, se dermos a δ um valor tão pequeno quanto se queira, podemos determinar um valor correspondente para m tal que as desigualdades

$$\left| \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a) \right| < \frac{\delta}{10}, \quad \left| \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a+\theta h) \right| < \frac{\delta}{10}$$

sejam satisfeitas por todos os valores do inteiro p e por todos os valores de h , com a condição de $a+h$ pertencer ao intervallo considerado. Logo a desigualdade

$$\left| \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)] \right| < \frac{\delta}{5}$$

é também satisfeita pelos mesmos valores de p e h .

Por outra parte, por ser

$$\sum_1^m f'_n(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_1^m \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h},$$

podemos concluir que existe um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\left| \sum_1^m \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] \right| < \frac{\delta}{5}$$

(onde m tem um valor finito anteriormente determinado) é satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < h_1$.

Finalmente, por serem convergentes as series $\Sigma f_n(x)$ e $\Sigma f'_n(x)$, a cada valor de h corresponderá um valor de p tal que será

$$\left| \frac{R(a+h)}{h} \right| < \frac{\delta}{5}, \quad \left| \frac{R(a)}{h} \right| < \frac{\delta}{5}, \quad |R_1(a)| < \frac{\delta}{5}.$$

Das desigualdades precedentes e da egualdade de que se partiu, conclue-se que, dando

oo

a δ um valor tão pequeno quanto se queira, ha sempre um valor correspondente h_1 tal que a desigualdade

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) \right| < \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5}$$

será satisfeita pelos valores de h que satisfazem á condição $|h| < h_1$; e, portanto, teremos

$$\lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \sum_1^{\infty} f'_n(a),$$

que é o que se queria demonstrar.

II

Singularidades de algumas funcções

150. *Funcções descontínuas em pontos isolados.* — Uma funcção $f(x)$, definida na vizinhança do ponto a , é descontínua no ponto $x=a$, quando n'este ponto se torna infinita ou passa de um valor a outro. Da primeira especie de descontinuidade temos até aqui encontrado exemplos nas funcções racionais, quando a é raiz do denominador, na funcção $\tan x$, quando é $x = \left(k + \frac{1}{2}\pi\right)$, k representando um numero inteiro, etc. Para exemplo da segunda especie de descontinuidade, da qual não offerecem exemplo as funcções que até aqui temos estudado, apresentarei a funcção definida pela serie seguinte:

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)} + \dots + \frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})} + \dots$$

Com effeito, temos evidentemente

$$\begin{aligned} \frac{1-x^m}{1+x^m} &= -1 + \frac{2}{1+x^m}, \\ \frac{1}{1+x^m} &= \frac{1}{1+x^{m-1}} + \frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})}, \\ \frac{1}{1+x^{m-1}} &= \frac{1}{1+x^{m-2}} + \frac{x^{m-2}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^{m-2})}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+x} + \frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}, \\ \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{2} + \frac{1-x}{2(1+x)}, \end{aligned}$$

d'onde se tira

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)} + \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)} + \dots + \frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)},$$

e portanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-x^m}{1+x^m} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}.$$

D'esta egualdade conclue-se que a funcção considerada é igual a $+1$, se o valor absoluto de x é menor do que a unidade, que é igual a -1 , se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, que é igual a zero, se é $x=1$, e que é igual ao infinito, se é $x=-1$. A funcção é pois descontínua no ponto $x=1$, onde passa do valor $+1$ ao valor -1 , e no ponto $x=-1$ onde é infinita.

151. Condensação das singularidades. — As funcções que até aqui temos encontrado apresentam em um intervallo finito um numero finito de pontos em que são descontínuas. Ha porém funcções que, em um intervallo finito, são descontínuas em um numero infinito de pontos, separados por outros em que são contínuas, e ha funcções que, em um intervallo finito, são descontínuas em todos os pontos. Para formar funcções d'esta natureza, póde-se seguir um methodo, devido a Hankel⁽¹⁾ e por elle chamado *methodo da condensação das singularidades*, por meio do qual, partindo de uma funcção com um numero limitado de singularidades, se fórma uma funcção com infinitas singularidades. Vamos aqui expôr a parte fundamental d'este methodo, que se póde estudar desenvolvidamente no excellente livro de Dini: *Fundamenti per la teorica delle funzione di variabili reali*.

I. Represente-se por $\varphi(y)$ uma funcção de y que no intervallo entre $y=-1$ e $y=+1$, o ponto 0 sendo exceptuado, seja continua e menor do que uma quantidade M , que no ponto $y=0$ seja nulla e que, quando y tende para zero passando separadamente por valores positivos e negativos, tendâ para um limite differente de zero, ou para dois limites, um dos quaes, pelo menos, seja differente de zero.

A funcção $\varphi(\text{sen } p\pi x)$, onde p é inteiro, será nulla e descontínua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$ (m inteiro), e será continua nos outros pontos.

N'estes ultimos pontos, a funcção

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi(\text{sen } n\pi x)$$

(1) Hankel: — *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen* — Tubingue, 1870.

é também continua, se A_1, A_2 , etc. representarem quantidades positivas taes que seja convergente a serie $\sum_1^{\infty} A_n$. Com effeito, n'este caso, a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor α_1 de α tal que a desigualdade

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} MA_n < \delta$$

é satisfeita quando $\alpha > \alpha_1$. Logo a desigualdade

$$\left| \sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} A_n \varphi(\text{sen } n\pi x) \right| < \delta$$

é também satisfeita pelos mesmos valores de α . A serie (1) é pois uniformemente convergente, e portanto a função $f(x)$ é continua (n.º 148) nos pontos considerados.

Consideremos agora os pontos em que a função $\varphi(\text{sen } p\pi x)$ é descontínua; e seja primeiramente m um numero par.

Pondo $n = ap + b$, onde b representa um numero inteiro menor do que p , temos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum A_{ap+b} \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right],$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros e positivos de a e b , excluindo os termos correspondentes a $b=0$, os quaes são nulos.

Do mesmo modo temos

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \sum A_{ap+b} \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right]$$

ou, separando os termos correspondentes a $b=0$,

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \sum A_{ap+b} \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right] + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi).$$

Logo temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) &= \sum A_{ap+b} \left\{ \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right] - \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right] \right\} \\ &\quad + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi). \end{aligned}$$

Mas, empregando uma analyse semelhante á que foi usada precedentemente para demonstrar que a função definida pela serie (1) é continua quando x é irracional, vê-se que a função $\sum A_{ap+b} \varphi[\text{sen}(ap+b)\pi x]$ é continua no ponto $x = \frac{m}{p}$, quando b differente de zero, e que é, portanto,

$$\lim_{h=0} \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right] = \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right].$$

Vem pois

$$\lim_{h=0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi).$$

Quer h tenda para zero passando por valores positivos, quer h tenda para zero passando por valores negativos, da uniformidade de convergencia da serie

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi),$$

na visinhança do ponto $h=0$, conclue-se que, por mais pequeno que seja o valor que se dê a δ , ha sempre um valor α_1 tal que a desigualdade

$$\left| \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) \right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de α superiores a α_1 , qualquer que seja o valor que se dê a h , entre certos limites.

Por outra parte, por ser convergente a serie $\sum A_{ap}$, existe um numero α_2 tal que a desigualdade

$$\left| \lim_{h=0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \right| < M \left| \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de α superiores a α_2 .

Logo as duas desigualdades precedentes são satisfeitas simultaneamente pelos valores de α superiores a α_1 e α_2 .

Por outra parte, existe sempre um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\left| \sum_{a=1}^{\alpha} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\alpha} A_{ap} \right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de h que verificam a condição $|h| < h_1$.

D'estas tres desigualdades resulta

$$\left| \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \right| < \delta,$$

quando $|h| < h_1$; e portanto temos

$$\lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) = \lim_{h=0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap},$$

e

$$\lim_{h=0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como, por hypothese, um pelo menos dos dois valores de $\lim_{h=0} \varphi(\text{sen } aph\pi)$, correspondentes um a valores positivos e outro a valores negativos de h , é diferente de zero, a função $f(x)$ é descontínua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$.

Por uma analyse semelhante se mostra que a função $f(x)$ é descontínua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$, quando m é impar.

Logo a função $f(x)$ é continua nos pontos em que x é irracional, e é descontínua nos pontos em que x é racional.

Para applicar o methodo anterior, é necessario formar uma função $\varphi(y)$ que satisfaça ás condições impostas anteriormente a esta função. Póde servir para este fim a seguinte:

$$\varphi(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k + 1][(y+1)^{k-1} + 1]},$$

que se deduz da serie que considerámos no n.º 150, pondo $x = y + 1$.

Com effeito, sendo aquella serie igual a $+1$, 0 ou -1 , segundo é $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$, será esta igual a $+1$, 0 ou -1 , segundo é $y < 0$, $y = 0$ ou $y > 0$.

Temos pois a função

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \text{sen } n\pi x (\text{sen } n\pi x + 1)^{k-1}}{[(\text{sen } n\pi x + 1)^k + 1][(\text{sen } n\pi x + 1)^{k-1} + 1]},$$

que é continua nos pontos onde x é irracional e que é descontínua nos pontos onde x é racional.

II. Partindo da serie que vimos de empregar, podemos formar agora uma função totalmente descontínua em um intervallo finito. Com effeito, a somma da serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! [\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2}$$

é igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$, quando x é um numero irracional, e é infinita, quando x é racional, porque no primeiro caso a função $[\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2$ é igual a $+1$, e no segundo caso é nulla quando $n = p$ e $x = \frac{m}{p}$. Logo a função

$$f(x) = \frac{e-1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! [\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2}}$$

é igual a zero, quando x é racional, e é igual a $+1$, quando x é irracional; e portanto é totalmente descontínua em um intervalo qualquer.

152. *Exemplo de uma função continua que não tem derivada.* — Pelo methodo de Hankel podem formar-se funções continuas com um numero infinito de pontos onde não têm derivada. Não entraremos porém aqui n'esta parte do methodo de condensação das singularidades, e limitar-nos-hemos a apresentar um exemplo ⁽¹⁾ de uma função continua que não tem derivada em ponto algum, devido a Weierstrass, que trataremos pela mesma analyse que este eminente geometra (*Jornal de Crelle*, tom. 79). Esta função é a seguinte

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n x \pi,$$

onde a , que representa um inteiro positivo impar, e b , que representa um numero positivo menor do que a unidade, devem ser escolhidos de modo que seja $ab > 1$ e $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$.

A serie que define $f(x)$ é uniformemente convergente, qualquer que seja o valor de x . Com effeito, por ser convergente a progressão Σb^n , a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor m_1 , tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

é satisfeita quando $m > m_1$. Logo a desigualdade

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos a^n x \pi \right| < \delta$$

é tambem satisfeita pelos mesmos valores de m , qualquer que seja x , e a serie é portanto uniformemente convergente.

D'este facto e de ser cada termo da serie uma função continua de x conclue-se (n.º 148) que a função $f(x)$ é continua.

Posto isto, vejamos como Weierstrass demonstra que esta função não tem derivada.

Represente x_0 um valor qualquer de x , m um numero inteiro positivo e a_m um numero inteiro tal que seja

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - a_m < \frac{1}{2}.$$

⁽¹⁾ Vejam-se outros exemplos no importante trabalho de Darboux intitulado — *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris*, 1875).

A memoria célebre que Riemann consagrou á theoria das series trigonometricas inspirou uma grande parte dos exemplos das funções sem derivada que têm sido dados.

Representando a diferença $a^m x_0 - \alpha_m$ por x_{m+1} e pondo

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

vem

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

d'onde se conclue que x_0 está comprehendido entre x' e x'' , e que se pode dar a m um valor tão grande que x' e x'' diffiram de x_0 tão pouco quanto se queira.

Por outra parte, temos

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} \right) = A + B,$$

pondo

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} \left(a^n b^n \cdot \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} \right),$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} x' \pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x' - x_0} \right).$$

Por ser

$$\frac{\cos(a^n x') \pi - \cos(a^n x_0) \pi}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \right) \pi \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi},$$

$$\left| \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \right) \pi \right| < 1, \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \right| < 1,$$

temos ainda

$$|A| < \pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n < \frac{\pi}{ab-1} (ab)^m.$$

Como é

$$\cos a^{m+n} x' \pi = \cos a^n (a_m - 1) \pi = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos a^{m+n} x_0 \pi = \cos (a^n \alpha_m + a^n x_{m+1}) \pi = (-1)^{\alpha_m} \cos a^n x_{m+1} \pi,$$

temos tambem

$$B = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos a^n x_{m+1} \pi}{1 + x_{m+1}} b^n;$$

e, por serem positivos todos os termos da somma Σ que entra no segundo membro d'esta

egualdade, e o primeiro termo não ser menor do que $\frac{2}{3}$ (visto que x_{m+1} está compreendido entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$),

$$(-1)^{\alpha_m} B > \frac{2}{3} (ab)^m.$$

Logo

$$B = (-1)^{\alpha_m} \frac{2}{3} \eta (ab)^m, \quad A = (-1)^{\alpha_m} \cdot \frac{\eta \varepsilon \pi}{ab-1} (ab)^m,$$

onde η representa um numero positivo, maior do que a unidade, e ε uma quantidade comprehendida entre $+1$ e -1 .

Temos pois

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{ab-1} \right).$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab-1} \right).$$

Dando pois a a e b valores taes que seja $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$, conclue-se das egualdades precedentes que as razões que entram nos seus primeiros membros, tendem para $+\infty$ e $-\infty$, quando m tende para o infinito e, portanto, quando x' e x'' tendem para x_0 . Logo a funcção $f(x)$ não tem derivada em ponto algum x_0 .

CAPITULO VIII

Funções de variaveis imaginarias

I

Definições e principios geraes

153. Tendo de tratar agora das funções de variaveis imaginarias, recordemos primeiramente que toda a variavel imaginaria $z = x + iy$ pode ser representada por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y ; e, portanto, que podemos falar no ponto z , quando nos quizermos referir ao ponto (x, y) .

Seja

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

uma função da variavel $z = x + iy$. Mudemos n'esta função x em $x + h$ e y em $y + k$ e supponhamos que a razão

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik}$$

tende para um limite determinado $f'(z)$, quando $h + ik$ tende de qualquer modo para zero, mesmo quando uma das quantidades h e k é nulla. Este limite chama-se, como no caso das variaveis reaes, *derivada de $f(z)$* .

Por ser o limite da razão precedente o mesmo, quando $f(z)$ tem derivada, quer h e k sejam differentes de zero, quer uma d'estas quantidades seja nulla, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h, y) + i\psi(x + h, y) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{h} = f'(z),$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y + k) + i\psi(x, y + k) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{ik} = f'(z),$$

*

e portanto

$$(a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = if'(z),$$

d'onde se deduz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right],$$

ou

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Temos assim duas condições a que devem satisfazer as funcções $\varphi(x, y)$ e $\phi(x, y)$, para que $f(z)$ tenha derivada.

Accrescentaremos ainda que a primeira das equações (a) faz ver que, se $f'(z)$ for uma funcção continua de z , $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ são funcções continuas de x e y .

A proposição reciproca da precedente é verdadeira. Se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ representarem funcções continuas de x e y , as egualdades (n.º 68-2.º)

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha_1 h + \alpha_2 k,$$

$$\phi(x+h, y+k) = \phi(x, y) + h \frac{\partial \phi}{\partial x} + k \frac{\partial \phi}{\partial y} + \beta_1 h + \beta_2 k,$$

onde $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ representam quantidades infinitamente pequenas com h e k , dão, attendendo á fórmulas (1),

$$\begin{aligned} & \varphi(x+h, y+k) + i\phi(x+h, y+k) - [\varphi(x, y) + i\phi(x, y)] \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (h + ik) + (\alpha_1 + i\beta_1) h + (\alpha_2 + i\beta_2) k. \end{aligned}$$

Temos pois, dividindo os dois membros d'esta egualdade por $h + ik$ e attendendo a que o primeiro membro da nova egualdade tende para $f'(z)$, quando $h + ik$ tende para zero,

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} + \lim \frac{(\alpha_1 + i\beta_1) h}{h + ik} + \lim \frac{(\alpha_2 + i\beta_2) k}{h + ik},$$

ou, attendendo a que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 tendem para zero e a que os módulos de $\frac{h}{h + ik}$ e $\frac{k}{h + ik}$ são inferiores á unidade,

$$(2) \quad f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Logo, se a função $f(z)$ satisfaz ás condições (1) e se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ são funções continuas de x e y , a função $f(z)$ tem derivada.

Accrescentaremos que esta fórmula determina a derivada e mostra que $f'(z)$ é uma função contiua de z no caso considerado.

154. É facil de ver que o que se disse no n.º 61 a respeito da derivação das sommas, productos, quocientes e funções de funções tem ainda logar no caso das funções de variaveis imaginarias. Estamos pois reduzidos a considerar as funções simples.

- 1) É facil de ver que a derivada de $a \pm z$ é ± 1 , e que a derivada de bz é b .
- 2) A derivada de e^z obtem-se applicando a fórmula (2) á função

$$u = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

que dá $u' = e^z$.

- 3) A derivada de cada ramo da função $\log z$ obtem-se applicando tambem a fórmula (2) á função

$$u = \log z = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) + i \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x},$$

que dá $u' = \frac{1}{z}$, como no caso das variaveis reaes.

- 4) A derivada de z^m acha-se, pondo, como se fez no n.º 62, $z^m = e^{m \log z}$, e é egual a mz^{m-1} .

As outras funções dependem das anteriores, e porisso acham-se facilmente as suas derivadas, e vê-se que as regras dadas, para as formar no caso das variaveis reaes, subsistem no caso das variaveis imaginarias.

155. Se, entre cada grupo de dois pontos de uma região A do plano, onde estão representados os valores de z , se poder traçar uma linha continua que não corte o seu contorno, a região considerada diz-se uma *área continua*. Se em todos os pontos d'esta região $f(z)$ tem uma derivada, diz-se que $f(z)$ é uma *função monogenea* ou uma *função analytica de z na área A* . A área A póde abranger todo o plano, como acontece, por exemplo, no caso das funções e^z , $\sin z$, etc.

A função monogenea $f(z)$ diz-se *uniforme* na área A , quando a cada ponto z da área corresponde um unico valor da função (1).

(1) A theoria geral das funções de variaveis imaginarias foi fundada principalmente por Cauchy, que consagrou a esta theoria muitos dos seus mais importantes trabalhos. Depois occuparam-se d'ella muitos geometras eminentes, á frente dos quaes estão Riemann e Weierstrass. Para a estudar têm sido empregados por alguns geometras methodos fundados na theoria das series, e por outros methodos pertencentes ao Calculo integral. Aqui vamos applicar os primeiros ao estudo de algumas questões relativas áquellas funções; depois, em outro logar d'esta obra, faremos applicações dos segundos ao estudo de outras.

A respeito das definições precedentes faremos as observações seguintes:

1.^a Uma função monogenea em uma área A póde ser uma parte de outra função monogenea em uma área que contenha a primeira. Assim, por exemplo, a função definida pela serie

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots,$$

convergente quando é $|z| < 1$, faz parte da função $\frac{1}{1-z}$, monogenea em todo o plano, excepto no ponto $z = 1$.

Do mesmo modo, a função definida pela serie

$$f(z) = F(z) - \frac{1}{z-a} + (z-a-1) \left[\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-a)^3} + \dots \right]$$

é igual a $F(z)$, quando $|z-a| > 1$, e é igual ao infinito, quando $|z-a| < 1$. Logo se $F(z)$ representa uma função monogenea em todo o plano, $f(z)$ representa uma parte d'essa função monogenea.

2.^a Uma função de uma variavel imaginaria z póde ser monogenea só em parte da área em que é determinada. Tem, por exemplo, esta propriedade a função (¹)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b z^{a^n},$$

quando a , que representa um numero inteiro positivo impar, e b , que representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, satisfazem ás condições $ab > 1$ e $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$. Com effeito, a serie considerada é convergente quando é $|z| < 1$. Em todos os pontos que satisfazem á condição $|z| < 1$, a função tem uma derivada finita, como adiante veremos. Nos pontos que satisfazem á condição $|z| = 1$, a função não tem derivada, visto que, substituindo a variavel z por $\cos \omega + i \sin \omega$, vem

$$f(z) = \sum_0^{\infty} b^n [\cos(a^n \omega) + i \sin(a^n \omega)],$$

e a função $\sum_0^{\infty} b^n \cos(a^n \omega)$ não tem derivada (n.º 152) relativamente a ω .

Accrescentaremos ainda que se vê, raciocinando como no n.º 148, que a função $f(z)$ é

(¹) Weierstrass: — *Zur Functionenlehre* (*Monatsbericht der K. Akademie zu Berlin*, 1880).

Vêja-se outro exemplo em um artigo que publicámos no tom xvii do *Bulletin des sciences mathématiques*, transcripto no tom. II das nossas *Obras sobre mathematica*.

continua mesmo na circumferencia do circulo de raio igual á unidade, e que portanto os valores que a funcção toma n'esta circumferencia dependem dos valores que toma no seu interior; porisso não existe funcção alguma monogenea em uma área continua, que contenha no seu interior o circulo considerado, a qual coincida com a precedente no interior d'este circulo, e a serie precedente representa portanto uma funcção analytica completa.

3.^a Quando a região do plano em que uma expressão analytica $f(z)$ é determinada, se compõe de muitas áreas separadas, $f(z)$ póde representar, n'estas differentes áreas, differentes funcções monogeneas completamente independentes. Esta observação importante foi demonstrada por Weierstrass da maneira seguinte.

Seja $\varphi(z)$ uma expressão igual a $+1$, quando $|z| < 1$, e igual a -1 , quando $|z| > 1$. Pondo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

a expressão $F_0(z) + F_1(z)\varphi(z)$ é igual a $f_1(z)$, quando $|z| < 1$, e é igual a $f_2(z)$, quando $|z| > 1$.

Ha varias expressões analyticas que satisfazem ás condições impostas a $\varphi(z)$; aqui empregaremos a expressão (1)

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}(1-z)}{(1+z^{k-1})(1+z^k)}$$

considerada no n.º 150. Com effeito, vê-se por meio da analyse empregada no numero citado, que temos

$$\varphi(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - z^m}{1 + z^m},$$

quer z seja real, quer seja imaginario; e d'esta egualdade resulta que $\varphi(z) = 1$, quando $|z| < 1$, e que $\varphi(z) = -1$, quando $|z| > 1$.

Ha muitos outros modos de formar expressões analyticas que satisfazem ás condições do theorema enunciado. Aqui exporemos ainda um, devido a Lerch, professor na Universidade de Fribourg (2).

Sejam u_1 e u_2 duas funcções monogeneas independentes, e consideremos a fracção continua

$$f(z) = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \dots}}$$

(1) Esta expressão é reciproca de outra considerada pelos srs. Schröder e Tannery. Veja-se um artigo que a este respeito publiquei no *Bulletin des sciences mathématiques*, tom. xxii, transcripto no tom. ii das *Obras sobre mathematica*.

(2) *Bulletin des sciences mathématiques*, 2.^a série, tom. x.

cujas convergentes c_{n+1} e c_n estão ligadas pela relação

$$c_{n+1} = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{c_n},$$

ou

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_n - u_1}{c_n - u_2},$$

d'onde resulta

$$\frac{c_n - u_1}{c_n - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2}, \quad \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-2} - u_1}{c_{n-2} - u_2}, \text{ etc.},$$

e portanto

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} \cdot \frac{c_0 - u_1}{c_0 - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+2},$$

visto ser $c_0 = u_1 + u_2$.

D'esta egualdade conclue-se que é, para $n = \infty$, $\lim c_{n+1} = u_1$, se $|u_2| < |u_1|$, e $\lim c_{n+1} = u_2$, se $|u_2| > |u_1|$; isto é, que a expressão $f(z)$ representa u_1 na área onde é $|u_2| < |u_1|$, e que representa u_2 na área onde é $|u_2| > |u_1|$.

II

Extensão da fórmula de Taylor ás funções de variaveis imaginarias

156. Seja $z = \rho (\cos \omega + i \sin \omega) = \rho e^{i\omega}$ uma variavel complexa, que supponmos descrever, quando varia, uma recta que passa pela origem das coordenadas e faz um angulo ω com o eixo das abscissas, e seja

$$F(z) = F(\rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

uma função d'esta variavel, que supponmos admittir derivadas finitas até á ordem n , para todos os valores que toma z , quando varia desde 0 até z . Teremos (n.º 113), desenvolvendo $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ pela formula de Maclaurin,

$$F(z) = F(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{\rho^a}{a!} [\varphi^{(a)}(0) + i\psi^{(a)}(0)] + R_n,$$

$$R_n = \frac{\rho^n}{(n-1)! m} [(1-\theta_1)^{n-m} \varphi^{(n)}(\theta_1 \rho) + i(1-\theta_2)^{n-m} \psi^{(n)}(\theta_2 \rho)].$$

Temos porém, derivando $F(z)$ a vezes relativamente a ρ ,

$$e^{ai\omega} F^{(a)}(z) = \varphi^{(a)}(\rho) + i\psi^{(a)}(\rho);$$

e, por ser

$$\theta_1 \rho e^{i\omega} = \theta_1 z, \quad \theta_2 \rho e^{i\omega} = \theta_2 z,$$

temos também

$$e^{ni\omega} F^{(n)}(\theta_1 z) = \varphi^{(n)}(\theta_1 \rho) + i\psi^{(n)}(\theta_1 \rho),$$

$$e^{ni\omega} F^{(n)}(\theta_2 z) = \varphi^{(n)}(\theta_2 \rho) + i\psi^{(n)}(\theta_2 \rho).$$

Logo⁽¹⁾

$$(1) \quad F(z) = F(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{z^a}{a!} F^{(a)}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!m} \Re \{ z^n F^{(n)}(\theta_1 z) \} + i \frac{(1-\theta_2)^{n-m}}{(n-1)!m} \Im \{ z^n F^{(n)}(\theta_2 z) \}.$$

Pondo na expressão de R_n

$$z^n = B e^{ib}, \quad \frac{(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!m} F^{(n)}(\theta_1 z) = C e^{ic}, \quad \frac{(1-\theta_2)^{n-m}}{(n-1)!m} F^{(n)}(\theta_2 z) = D e^{id},$$

póde dar-se-lhe a forma

$$R_n = BC \cos(b+c) + BD i \sin(b+d) = H e^{ib},$$

onde

$$H^2 = B^2 C^2 \cos^2(b+c) + B^2 D^2 \sin^2(b+d).$$

Suppondo agora $C \geq D$, temos $H^2 \leq 2B^2 C^2$ e portanto $H = \lambda BC \sqrt{2}$, onde λ representa um factor positivo, igual ou inferior á unidade.

Logo temos a fórmula

$$(2) \quad R_n = \lambda \sqrt{2} e^{i\alpha} \frac{z^n (1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!m} F^{(n)}(\theta_1 z),$$

onde $\alpha = h - b - c$.

Se for $D > C$, demonstra-se esta fórmula do mesmo modo, pondo $H = \lambda BD \sqrt{2}$.

(1) Pelas notações $\Re [A]$ e $\Im [A]$ representam-se a parte real e o coeficiente de i em A .

Applicando as fórmulas (1) e (2) á função $f(z+z_0)$ e mudando no resultado z em $Z-z_0$, vem a fórmula

$$f(Z) = f(z_0) + (Z-z_0)f'(z_0) + \dots + \frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0) + R_n,$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2} e^{ai} \frac{(Z-z_0)^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)! m} f^{(n)}[z_0 + \theta(Z-z_0)],$$

que tem logar quando as funções $f(z)$, $f'(z)$, \dots , $f^{(n)}(z)$ são finitas para todos os valores que toma z , quando varia desde z_0 até Z , descrevendo a recta que une os pontos correspondentes.

A fórmula precedente é, como se vê, a *fórmula de Taylor*, que foi demonstrada primeiro no caso das variaveis reaes, e que foi estendida por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias⁽¹⁾. A expressão do resto R_n , que vimos de achar, é a expressão devida a Darboux⁽²⁾, com a fórma que lhe deu Mansion⁽³⁾.

157. *Desenvolvimento do binomio.* — Applicando a fórmula de Taylor á função $u=(1+z)^k$, onde supponmos k real, e considerando o ramo que dá $u=1$, quando $z=0$, vem, como no n.º 116,

$$(1+z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{n-1} \binom{k}{a} z^a + R_n,$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2} e^{ai} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} z^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z} \right)^{n-1} (1+\theta z)^{k-1}.$$

1) Se o módulo ρ de $z = \rho e^{i\omega}$ é menor do que a unidade, a quantidade

$$\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} \rho^n$$

tende (n.º 116) para zero, quando n tende para o infinito. Além d'isso, temos

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta z} \right| = \frac{1-\theta}{\sqrt{1+\theta^2 \rho^2 + 2\theta \rho \cos \omega}} \leq \frac{1-\theta}{1-\theta \rho} < 1.$$

⁽¹⁾ Podem ver-se os principaes methodos que têm sido empregados para demonstrar a fórmula de Taylor no caso das variaveis imaginarias no nosso trabalho *Sobre o desenvolvimento das funções em serie*, já mencionado no n.º 113.

⁽²⁾ *Journal de Liouville*, 3.ª serie, tom. II.

⁽³⁾ *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*, 1887.

Logo R_n tende para 0, quando n tende para o infinito, e o binomio considerado póde ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de z pela fórmula

$$(1+z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \binom{k}{a} z^a.$$

2) Se o módulo de z é maior do que a unidade, a serie precedente é divergente. Com effeito, o módulo do quociente de dois termos consecutivos d'esta serie tende para ρ , quando a tende para o infinito.

Para o estudo do caso em que o módulo de z é igual á unidade, assim como para o estudo do caso em que k é imaginario, póde consultar-se uma excellente memoria de Mansion publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tom. IX).

O estudo das condições de convergencia do desenvolvimento do binomio foi feito pela primeira vez de uma maneira completa por Abel em uma memoria admiravel, que consagrou a esta serie (*Oeuvres*, tom. I).

158. Appliquemos agora a fórmula que vimos de obter á deducção de algumas outras. A egualdade

$$\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dá

$$(2i)^k \text{sen}^k z = e^{kiz} (1 - e^{-2iz})^k.$$

Se k é um numero inteiro positivo, vem

$$\begin{aligned} (2i)^k \text{sen}^k z &= \sum_{a=0}^k (-1)^a \binom{k}{a} e^{(k-2a)iz} \\ &= \sum_{a=0}^k (-1)^a \binom{k}{a} [\cos(k-2a)z + i \text{sen}(k-2a)z]. \end{aligned}$$

D'esta egualdade tira-se, se k é par, attendendo a que nos termos equidistantes dos extremos é igual a parte dependente do coseno, e igual, em valor absoluto, mas de signal contrario, a parte dependente do seno, e attendendo tambem a que existe um termo medio,

correspondente a $a = \frac{1}{2}$, cujo valor é $\binom{k}{\frac{1}{2}k}$,

$$(-1)^{\frac{k}{2}} 2^k \text{sen}^k z = 2 \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}k-1} (-1)^a \binom{k}{a} \cos(k-2a)z + \binom{k}{\frac{1}{2}k}.$$

*

Do mesmo modo se acham as fórmulas

$$(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} 2^k \operatorname{sen}^k z = 2^{\frac{1}{2}(k-1)} \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}(k-1)} (-1)^a \binom{k}{a} \operatorname{sen}(k-2a)z,$$

que tem logar quando k é ímpar,

$$2^k \cos^k z = 2^{\frac{1}{2}k-1} \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}k-1} \binom{k}{a} \cos(k-2a)z + \left(\frac{1}{2}\binom{k}{k}\right),$$

que tem logar quando k é par, e

$$2^k \cos^k z = 2^{\frac{1}{2}(k-1)} \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}(k-1)} \binom{k}{a} \cos(k-2a)z,$$

que tem logar quando k é ímpar.

Estas fórmulas importantes dão os desenvolvimentos da potencia k de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ ordenados segundo os senos e os cosenos dos arcos multiplos de z . Foram dadas por Euler na *Introductio in Analysin infinitorum*.

159. *Desenvolvimento de e^z , $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.* — Applicando a fórmula de Taylor á função e^z , vem

$$e^z = 1 + z + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda \sqrt{2} e^{\alpha i} \frac{z^n}{n!} e^{iz}.$$

Por $\frac{|z|^n}{n!}$ tender para zero, quando n tende para o infinito, esta fórmula mostra que a função e^z é sempre susceptível de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z pela fórmula

$$e^z = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{z^a}{a!},$$

qualquer que seja o valor de z .

Por uma analyse semelhante se vê que as series achadas no n.º 121 para o seno e o coseno de uma variavel real ainda têm logar no caso das variaveis imaginarias.

160. *Desenvolvimento de $\log(1+z)$.* — Applicando a fórmula de Taylor a esta função, vem, como no caso das variaveis reaes,

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \dots + (-1)^{n-2} \frac{z^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \lambda \sqrt{2} e^{\alpha i} \cdot \frac{z^n}{1+\theta z} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1},$$

considerando sómente aquelle ramo de $\log(1+z)$ cujo valor inicial é igual a zero. É facil de ver, procedendo como no n.º 157, que, se o módulo de z é menor do que a unidade, temos o desenvolvimento em serie

$$\log(1+z) = \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^{a-1} \frac{z^a}{a},$$

e que, se o módulo de z é maior do que a unidade, esta serie é divergente.

161. Fazendo uma outra applicação da fórmula demonstrada no n.º 156, vamos estender, por meio d'ella, ás funcções de variaveis imaginarias a regra para formar as derivadas das funcções compostas. A demonstração d'esta regra dada no n.º 169 é sómente applicavel ás variaveis reaes.

Seja $y=f(u, v)$ uma funcção dada e supponhamos que as derivadas $f'_u(u, v)$, $f'_v(u, v)$ e $f''_{vv}(u, v)$ são finitas no ponto (u, v) e nos pontos visinhos, e que $f'_v(u, v)$ é continua, relativamente a u , no ponto considerado.

Temos

$$f(u+k, v+l) = f(u+k, v) + lf'_v(u+k, v) + \frac{1}{2} \lambda \sqrt{2} e^{\alpha i} l^2 f''_{vv}(u+k, v+\theta l),$$

quando se dão a k e l valores sufficientemente pequenos para se poder applicar a fórmula dada no n.º 156; e

$$f(u+k, v) = f(u, v) + kf'_u(u, v) + \alpha_1 k,$$

$$f'_v(u+k, v) = f'_v(u, v) + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são quantidades que tendem para zero, quando k tende para zero. Logo

$$\begin{aligned} f(u+k, v+l) - f(u, v) &= kf'_u(u, v) + lf'_v(u, v) \\ &+ \alpha_1 k + \alpha_2 l + \frac{1}{2} \lambda \sqrt{2} e^{\alpha i} l^2 f''_{vv}(u+k, v+\theta l). \end{aligned}$$

Suppondo agora que u e v são funcções de z e que k e l são os valores dos augmentos que recebem u e v , quando se muda z em $z+h$, temos, devidindo ambos os membros d'esta equação por h e fazendo tender h para zero,

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v',$$

quando ao valor de z considerado corresponde um ponto (u, v) onde são satisfeitas as condições precedentemente enunciadas.

Do mesmo modo se considera o caso de a função dada depender de mais de duas funções componentes.

162. O processo anterior para achar o desenvolvimento das funções em serie é raras vezes applicavel por causa da complicação da expressão do resto R_n , que é necessario discutir, para saber se R_n tende para zero, quando n tende para o infinito. Recorre-se porisso n'este caso a um theorema célebre de Cauchy, que será demonstrado no *Calculo integral*, e ainda a um theorema importante, devido a Weierstrass, que aqui vamos demonstrar. Demonstraremos porém primeiramente o seguinte:

LEMMA. *Se a serie*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z = x + iy$$

for convergente em um circulo de raio dado, e se, em todos os pontos do interior d'este circulo que têm o mesmo módulo ρ , o módulo de $F(z)$ for menor do que uma quantidade positiva L , o módulo de cada termo da serie não póde exceder L .

Com effeito, multiplicando a serie proposta por z^{-m} , vem

$$\begin{aligned} z^{-m} F(z) &= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n z^{n-m} + R, \end{aligned}$$

R representando uma quantidade cujo módulo tende para zero, quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é $|z^{-m} F(z)| < L\rho^{-m}$, quando $|z| < \rho$, e como, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a uma quantidade positiva δ , existe sempre um valor k_1 tal que é $|R| < \delta$, quando $k > k_1$, teremos (n.º 11-I)

$$|z^{-m} F(z) - R| < L\rho^{-m} + \delta,$$

ou

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n z^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

quando $|z| = \rho$.

Dando agora n'esta desigualdade a z os valores

$$\rho, \rho e^{i\theta}, \rho e^{2i\theta}, \dots, \rho e^{(a-1)i\theta}.$$

e a k um valor maior do que os diferentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de z , temos as desigualdades

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} e^{i(n-m)\theta} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n \rho^{n-m} e^{i(n-m)\theta} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

.....,

que dão, sommando e attendendo ao theorema I do n.º 11,

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \dots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} \right) + ac_m + \sum_{n=m+1}^k c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \dots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} \right) \right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \dots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A$$

e dando á quantidade θ um valor que não seja raiz da equação $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, isto é, um valor tal que A seja finito,

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n A \rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^k c_n A \rho^{n-m} \right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte da desigualdade precedente independente de c_m .

D'esta desigualdade tira-se

$$(a) \quad |c_m| \leq L\rho^{-m} + \delta;$$

porque, se fosse $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$, podia dar-se a a um valor tão grande que fosse

$$|c_m| - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

e, portanto,

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser (n.º 11-I)

$$\frac{|B|}{a} + \left| c_m + \frac{B}{a} \right| \geq |c_m|.$$

163. THEOREMA. — *Se uma função $f(z)$ for susceptível de ser desenvolvida na serie uniformemente convergente dentro de um circulo de raio R com o centro na origem das coordenadas:*

$$(1) \quad f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z) + \dots,$$

e se as funções $P_0(z)$, $P_1(z)$, etc. forem susceptíveis de ser desenvolvidas nas series ordenadas segundo as potencias de z , convergentes dentro do mesmo circulo:

$$(2) \quad P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}z + A_2^{(n)}z^2 + \dots + A_m^{(n)}z^m + \dots,$$

a função $f(z)$ será tambem susceptível de ser desenvolvida na serie ordenada segundo as potencias de z :

$$(3) \quad f(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_mz^m + \dots,$$

e será

$$(4) \quad A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)} + \dots$$

Este theorema foi demonstrado por Weierstrass da maneira seguinte⁽¹⁾.

Seja ρ uma quantidade positiva menor de R ; por ser uniformemente convergente a serie (1) na circumferencia do raio ρ , a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponderá um valor n_1 de n , tal que a desigualdade

$$|P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \dots + P_{n+p}(z)| < \delta$$

será satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1 e por todos os valores de z que têm o módulo ρ , qualquer que seja p .

Mas temos (n.º 25)

$$P_{n+1}(z) + \dots + P_{n+p}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(n+1)} + \dots + A_m^{(n+p)}) z^m.$$

Logo, em virtude do lemma demonstrado no numero anterior, temos a desigualdade

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}| < \delta \rho^{-m},$$

d'onde se conclue a convergencia da serie (4).

(1) *Monatsberichte der Kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880.

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja $R > \rho_1 > \rho$, podemos dar a n_1 um valor tal que seja tambem

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}| < \delta \rho_1^{-m},$$

por maior que seja p ; e portanto

$$|\lim_{p \rightarrow \infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)})| \leq \delta \rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)} = A'_m,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}) = A''_m,$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m, \quad |A''_m| \leq \delta \rho_1^{-m},$$

vem, para os valores de z cujo módulo ρ é inferior a ρ_1 , a desigualdade

$$|A''_0| + |A''_1 z| + \dots + |A''_m z^m| + \dots < \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \dots + \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^m + \dots \right] < \delta \frac{\rho}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue (n.º 23-2.º) que a serie

$$A''_0 + A''_1 z + \dots + A''_m z^m + \dots$$

é absolutamente convergente.

Por outra parte, é tambem absolutamente convergente (n.º 25) a serie

$$\begin{aligned} P_0(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)}) z^m \\ &= A'_0 + A'_1 z + \dots + A'_m z^m + \dots \end{aligned}$$

Logo a serie

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$

é absolutamente convergente.

Temos depois

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + A''_m) z^m = \sum_{a=0}^n P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

RR

d'onde se tira

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m'' z^m,$$

e portanto (n.º 11-I)

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Como a δ se póde dar um valor tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m,$$

isto é, a egualdade (3), que se queria demonstrar.

EXEMPLO 1.º Consideremos a funcção $f(z) = \text{sen}(\text{sen } z)$. Temos o desenvolvimento

$$f(z) = \text{sen } z - \frac{\text{sen}^3 z}{3!} + \frac{\text{sen}^5 z}{5!} - \dots,$$

que é uniformemente convergente, qualquer que seja z (n.º 27). A funcção

$$\text{sen}^n z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^n$$

póde ser desenvolvida (n.º 25) em serie ordenada segundo as potencias de z , qualquer que seja z . Logo, em virtude do theorema precedente, tambem a funcção $\text{sen}(\text{sen } z)$ póde ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z , qualquer que seja z .

EXEMPLO 2.º Vê-se do mesmo modo que a funcção

$$f(z) = \text{sen}[\log(z+1)]$$

póde ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z , quando o módulo de z é menor do que a unidade.

164. Applicando o theorema precedente ás series ordenadas segundo as potencias de $z - a$, sendo z variavel e a constante, deduz se, como vamos ver, o seguinte theorema:

Se a serie

$$(1) \quad f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

fôr convergente no interior de um círculo de centro a e raio R , isto é, quando $|z - a| < R$, e se z_0 representar um ponto do interior d'este círculo, as derivadas $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, etc. existem, e são finitas e respectivamente eguaes aos valores que tomam no ponto z_0 as sommas das derivadas de primeira ordem, de segunda ordem, etc. dos termos da serie proposta, isto é:

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Em segundo logar, se fôr $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$, temos

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots$$

Com effeito, pondo na serie proposta $z = z_0 + h$, teremos

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + h - a)^n.$$

Esta serie, considerada como função de h , é uniformemente convergente quando é $|z_0 + h - a| < R$, e, portanto (n.º 11-I), quando é $|z_0 - a| + |h| < R$. Desenvolvendo] pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h , teremos, em virtude do theorema precedente,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h f_1(z_0) + h^2 f_2(z_0) + \dots,$$

onde

$$f_1(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f_2(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Pondo agora $h = z - z_0$, vem

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f_1(z_0) + \dots + (z - z_0)^n f_n(z_0) + \dots,$$

com a condição $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$.

Para das fórmulas precedentes tirar o theorema enunciado, basta notar primeiramente que

*

a ultima dá $f_1(z_0) = f'(z_0)$, e que, portanto, a derivada da função definida pela serie

$$f(z_0) = c_0 + c_1(z_0 - a) + \dots + c_n(z_0 - a)^n + \dots,$$

relativamente a z_0 , é igual á somma das derivadas dos seus termos.

Applicando depois esta regra á função $f_1(z_0)$ e notando que os termos de $f_2(z_0)$ são eguaes ás derivadas dos termos correspondentes da serie que define $f_1(z_0)$, conclue-se que $f_2(z_0) = f'_1(z_0) = f''(z_0)$. Continuando do mesmo modo, vê-se que $f_3(z_0) = f'''(z_0)$, etc.

COROLLARIO. *Se a serie (1) fôr convergente no interior do circulo de raio R e centro a, a função é continua dentro do mesmo circulo.*

Com effeito, em todos os pontos do interior d'este circulo $f(z)$ tem uma derivada finita.

165. A respeito da continuidade e das derivadas das series enunciaremos ainda os theoremas seguintes, que se demonstam do mesmo modo que os theoremas analogos relativos ás funcções de variaveis reaes (n.ºs 148 e 149):

1.º *Se a serie $f(x) = \Sigma f_n(x)$ fôr uniformemente convergente em uma área dada, a função $f(x)$ é continua nos pontos d'esta área em que todas as funcções $f_1(x)$, $f_2(x)$ etc. são continuas.*

2.º *Se a serie $\Sigma f_n(z)$ fôr convergente em uma área dada, e se na mesma área fôr uniformemente convergente a serie $\Sigma f'_n(z)$, formada com as derivadas dos termos da serie precedente, temos $f'(z) = \Sigma f'_n(z)$ na área considerada.*

166. Vimos no n.º 164 que, se a serie

$$(1) \quad f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^{n-1} + \dots$$

fôr convergente no interior de um circulo de raio R, a serie

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - a) + \dots + nc_n(z - a)^{n-1} + \dots$$

é convergente no interior do mesmo circulo. Vamos agora mostrar que o raio de convergencia d'esta segunda serie não póde ser superior ao da anterior.

Com effeito, se esta ultima serie fôr convergente quando $|z - a| = \rho$, existe um numero positivo B tal que temos

$$n |c_n| \rho^{n-1} < B,$$

por maior que seja o valor que se dê a n , e, portanto, dando a n valores maiores do que ρ ,

$$|c_n| \rho^n < B \frac{\rho}{n} < B,$$

por onde se vê que a serie (1) tambem é convergente (n.º 27).

Resulta do que precede um methodo para desenvolver uma funcção em serie ordenada segundo as potencias de $x-a$, quando se conhece o desenvolvimento da sua derivada. Assim, se quizermos achar o desenvolvimento de $f(x)$ e fôr conhecido o desenvolvimento da sua derivada

$$f'(z) = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots,$$

temos

$$f(z) = f(a) + a_0(z-a) + \dots + a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Procuremos, por exemplo, o desenvolvimento da funcção $u = \arcsen z$.

Por ser (n.º 116).

$$u' = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} z^{2n} + \dots,$$

onde o raio do circulo de convergencia é igual á unidade, temos o desenvolvimento, descoberto por Newton,

$$\arcsen z = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

onde se considera o ramo da funcção que se reduz a 0, quando $z=0$, o qual tem o mesmo circulo de convergencia que o anterior.

I. Resulta do que precede e do que se disse no n.º 163 que a funcção $u = \cos k(\arcsen z)$ póde ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z , quando $|z| < 1$.

A expressão d'este desenvolvimento é notavel, e porisso vamos procural-a.

Temos primeiramente

$$(1-z^2)u'^2 = k^2(1-u^2),$$

e portanto

$$(1-z^2)u'' - zu' + k^2u = 0.$$

Derivando agora n vezes esta equação (n.º 105-II), vem

$$(1-z^2)u^{(n+2)} - (2n+1)zu^{(n+1)} - (n^2 - k^2)u^{(n)} = 0,$$

e portanto, pondo $z=0$,

$$u_0^{(n+2)} = (n^2 - k^2)u_0^{(n)}.$$

Como porém temos $u_0=1$, $u'_0=0$, deduz-se d'esta egualdade que $u_0^{(n)}$ é igual a zero, quando n é impar, e que, quando $n=2m$,

$$u_0^{(2m)} = (-1)^m [k^2 - 2^2] [k^2 - 4^2] \dots [k^2 - (2m-2)^2].$$

Temos pois a fórmula, dada por João Bernoulli,

$$\cos k(\arcsen z) = 1 - \frac{k^2}{2!} z^2 + \frac{k^2(k^2-2^2)}{4!} z^4 - \frac{k^2(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{6!} z^6 - \dots$$

Acha-se do mesmo modo a fórmula, devida a Newton,

$$\sen k(\arcsen z) = kz - \frac{k(k^2-1^2)}{3!} z^3 + \frac{k(k-1^2)(k-3^2)}{5!} z^5 - \dots$$

O primeiro d'estes desenvolvimentos tem um numero finito de termos quando k é par, e o segundo quando k é impar, e, nestes casos, z póde ter um valor qualquer. Nos outros casos a serie é divergente quando $|z| > 1$.

Existem outras fórmulas analogas, devidas a Euler e Lagrange, que se podem ver nos bellos capitulos que este eminente geometra consagrou ao desenvolvimento das funcções circulares nas suas *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*.

III

Funcções regulares em uma região do plano

167. Definição. — Se a funcção $f(z)$, na vizinhança do ponto z_0 , fôr susceptível de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, isto é, se existir um numero positivo R , tal que seja

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

quando $|z - z_0| < R$, diz-se que a funcção $f(z)$ é regular no ponto z_0 .

É facil de ver que $(1+z)^k$, e^z , $\log(1+z)$, etc. são funcções regulares em todo o plano, exceptuando certos pontos isolados.

1) No caso do binomio $(1+z)^k$ temos

$$(1+z)^k = (1+z_0)^k \left[1 + \frac{z-z_0}{1+z_0} \right]^k = (1+z_0)^k \sum \left(\frac{k}{n} \right) \left(\frac{z-z_0}{1+z_0} \right)^n,$$

quando $|z - z_0| < |1 + z_0|$; e portanto esta função é regular em todo o plano, exceptuando-se o ponto $z_0 = -1$ quando k não é inteiro e positivo.

2) Do desenvolvimento

$$e^z = e^{z-z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z_0} \left[1 + z - z_0 + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} + \dots \right]$$

conclue-se que a função e^z é regular em todo o plano.

3) Da egualdade

$$\log(1 + z) = \log(1 + z_0) + \log\left(1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right) = \log(1 + z_0) + \frac{z - z_0}{1 + z_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^2 + \dots,$$

que tem logar quando é $|z - z_0| < |1 + z_0|$, conclue-se que $\log(1 + z)$ é uma função regular em todo o plano, excepto no ponto $z_0 = -1$.

4) Do mesmo modo se mostra que $\sin z$ e $\cos z$ são funções regulares em todo o plano.

168. THEOREMA 1.º *Se uma função uniforme, regular em todos os pontos de uma área continua A, fôr constante em todos os pontos de uma linha finita, contida na área A, é constante em toda a área.*

Representando, com effeito, por a o valor de z correspondente a um ponto qualquer da linha dada, teremos, para todos os valores de z representados pelos pontos de um circulo de centro a e raio R ,

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots$$

ou (n.º 164)

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \dots + \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Mas, por ser constante a função $f(z)$ em todos os pontos da linha dada, temos $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, etc. Logo será $f(z) = f(a)$ em todo o circulo considerado.

Tomando em seguida um ponto b do circulo anterior e repetindo o raciocinio precedente, demonstra-se do mesmo modo que $f(z) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um segundo circulo, que é em parte distincto do anterior. Tomando um ponto c d'este circulo acha-se do mesmo modo $f(z) = f(c) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um terceiro circulo. Continuando do mesmo modo até ao contorno da área A, demonstra-se completamente o theorema.

THEOREMA 2.º *Se duas funções uniformes, regulares em todos os pontos de uma área continua A, fôrem eguaes em todos os pontos de uma linha finita, contida na área A, são eguaes em toda a área.*

Este theorema é consequencia immediata do anterior, pois que a differença das duas funcções sendo nulla em todos os pontos da linha dada, será nulla em toda a área A.

THEOREMA 3.^o *Se uma funcção uniforme, regular no ponto a , se annulla assim como as suas derivadas até á ordem $m-1$, quando é $z=a$, teremos*

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$ é uma funcção uniforme regular na visinhança do ponto a .

Com effeito, sendo por hypothese

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_m(z-a)^m + \dots$$

e $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, etc., temos

$$f(z) = (z-a)^m \left[\frac{1}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{z-a}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + \dots \right],$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

THEOREMA 4.^o *Os pontos em que uma funcção uniforme, regular em uma área A, tem um mesmo valor, estão separados por intervallos finitos, se a funcção não é constante.*

Com effeito, por não ser constante a funcção $f(z)$ na área A, as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc. não podem ser todas eguaes a zero. Suppondo pois que $f^{(m)}(a)$ é a primeira derivada que não é nulla, temos

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m \left[\frac{1}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{z-a}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + \dots \right].$$

Mas é sempre possivel dar a δ um valor tão pequeno, que o módulo do primeiro termo d'esta differença seja maior que o módulo da somma dos seguintes, quando $|z-a| < \delta$. Logo no circulo de centro a e raio δ a differença $f(z) - f(a)$ não póde ser nulla em ponto algum differente de a .

THEOREMA 5.^o *A somma de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área A, é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Este theorema é uma consequencia immediata do theorema 4.^o do n.^o 25. Com effeito, chamando $f(z)$ e $F(z)$ as duas expressões dadas e a um ponto da área A, temos

$$f(z) = \Sigma c_n (z-a)^n, \quad F(z) = \Sigma C_n (z-a)^n,$$

e portanto

$$f(z) + F(z) = \Sigma (c_n + C_n) (z-a)^n.$$

THEOREMA 6.º *O producto de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área A, é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior, partindo do theorema 5.º do n.º 25.

THEOREMA 7.º *O quociente de duas expressões $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, uniformes e regulares na área A, é regular nos pontos da mesma área em que o denominador $\psi(z)$ não é nullo.*

Com effeito, pondo

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

onde c_0 é differente de zero, teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left[1 + \frac{(z-a)[c_1 + c_2(z-a) + \dots]}{c_0} \right]^{-1} = c_0 [1 + P(z-a)]^{-1},$$

pondo

$$\frac{(z-a)[c_1 + c_2(z-a) + \dots]}{c_0} = P(z-a).$$

Dando a $|z-a|$ um valor tão pequeno que seja $|P(z-a)| < 1$, podemos desenvolver $[1 + P(z-a)]^{-1}$ em serie ordenada segundo as potencias de $z-a$, e teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \{ 1 - P(z-a) + [P(z-a)]^2 - [P(z-a)]^3 + \dots \}.$$

Esta serie é uniformemente convergente na vizinhança do ponto a , assim como (n.º 25) as series que resultam de $P(z-a)$, $[P(z-a)]^2$, etc.; logo (n.º 163) a função $[1 + P(z-a)]^{-1}$ é susceptível de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de $z-a$ na vizinhança do ponto a . Esta função é pois regular no ponto a , assim como, em virtude do theorema anterior, a função $\varphi(x) [\psi(x)]^{-1}$.

IV

Funções regulares em todo o plano

169. A toda a função uniforme $f(z)$, regular em todos os pontos do plano, chama-se *função inteira* ou *holomorpha*. Taes são, entre as funções algebraicas, os polynomios racionais inteiros relativamente a z , e, entre as funções transcendentis, as funções e^z , $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ e, em geral (n.º 164), as funções que podem ser desenvolvidas em serie ordenada segundo as potencias inteiras positivas de z :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

qualquer que seja z .

A theoria das funções transcendentis inteiras é a continuação natural da theoria das funções racionais inteiras, estudada na Algebra, e as suas propriedades são, em parte, analogas ás propriedades d'estas. São tambem susceptíveis de se exprimir por um producto de factores, que tornam explicitas as raizes da função. Este resultado importante, demonstrado primeiro por Euler, Cauchy, Gauss, etc., em alguns casos particulares, foi completamente estabelecido por Weierstrass⁽¹⁾. Antes porém de expôr o bello theorema devido ao eminente geometra de Berlin, vamos considerar as duas funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, cuja decomposição em factores, devida a Euler, se obtem por considerações simples.

170. *Decomposição do seno e do coseno em factores.* — Da expressão de $\operatorname{sen} kz$ dada no n.º 52 tira-se, quando k é impar, pondo $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$,

$$\operatorname{sen} kz = f(\operatorname{sen} z),$$

onde f representa uma função inteira do grau k . Os k valores de $\operatorname{sen} z$ que annullam esta função, devem corresponder aos valores de z que satisfazem á equação $\operatorname{sen} kz = 0$ e que dão para $\operatorname{sen} z$ valores distinctos, isto é, aos valores de z seguintes:

$$0, \pm \frac{\pi}{k}, \pm \frac{2\pi}{k}, \dots, \pm \frac{\frac{1}{2}(k-1)\pi}{k}.$$

⁽¹⁾ Weierstrass: — *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veranderlichen* (Abhandlungen der K. Akademie zu Berlin, 1876).

Logo temos

$$\operatorname{sen} kz = A \operatorname{sen} z \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{2k}} \right) \dots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}} \right),$$

onde A é uma constante, que vamos determinar. Para isso, dividam-se os dois membros da igualdade precedente por kz e faça-se depois tender z para zero. O primeiro membro tendendo para a unidade e o segundo para $\frac{A}{k}$, teremos $A = k$.

Mudando na igualdade precedente z em $\frac{\pi z}{k}$, temos

$$\operatorname{sen} \pi z = k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{2k}} \right\} \dots \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}} \right\}.$$

Vamos agora procurar o limite para que tende o segundo membro d'esta igualdade, quando k tende para o infinito.

Por ser

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} = \pi z, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = \frac{z^2}{n^2},$$

temos

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1} \right) \left(1 - \frac{z^2}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} R_m,$$

$$R_m = \prod_{n=m}^{\frac{1}{2}(k-1)} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} \right\}.$$

Por ser (em virtude do que se disse nos n.ºs 121 e 159, e em virtude de ser $\frac{1}{2}(k-1)$ o maior valor que póde ter n)

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} - \frac{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^3}{3!} \cos \theta \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} \left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24} \right),$$

*

onde θ_n representa uma quantidade inferior á unidade em valor absoluto; e por ser

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k} = \frac{\pi^2 z^2}{k^2} (1 + \varepsilon)^2,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena, quando k é infinitamente grande, temos tambem

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = 1 - \frac{z^2 (1 + \varepsilon)^2}{n^2 \left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right)^2} = 1 + \frac{u_n}{n^2},$$

onde u_n representa uma quantidade cujo módulo não póde ser infinito, qualquer que seja n . Logo

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \cdot \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right).$$

Por outra parte, chamando L um numero maior do que as quantidades u_1, u_2 , etc., a serie $\sum_1^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ é convergente, visto que os seus termos são menores do que os termos correspondentes da serie (n.º 20) $\sum_1^{\infty} \frac{L}{n^2}$; portanto é tambem convergente o producto infinito $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$ e temos

$$\lim_{m=\infty} \prod_m^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right) = \frac{\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)}{\lim_{m=\infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)} = 1.$$

Vem pois a fórmula d'Euler

$$(a) \quad \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Do mesmo modo se decompõe $\cos \pi z$ em factores, o que dá

$$\cos \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

171. THEOREMA DE WEIERSTRASS. — Sendo dada a serie de quantidades $0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_c, \dots$, collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, póde construir-se uma funcção transcendente inteira pela fórmula

$$(1) \quad f(z) = z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \quad S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

cujas raízes são $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, e cujos respectivos graus de multiplicidade são $n_0, n_1, \dots, n_c, \dots$.

Reciprocamente, se $f_1(z)$ representar uma função inteira cujas raízes sejam $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, e os respectivos graus de multiplicidade n_0, n_1, \dots , esta função póde ser decomposta em factores, que tornam explicitas estas raízes, por meio da fórmula

$$(2) \quad f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c},$$

onde $\varphi(z)$ representa uma função inteira.

A demonstração que aqui vamos dar d'este importante theorema é devida a Mittag-Leffler, professor na Universidade de Stockholm⁽¹⁾.

Da serie (n.º 160).

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = -n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

que tem logar quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$, deduz-se

$$(A) \quad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c S_c(1, \infty)}$$

pondo, para brevidade,

$$S_c(u, v) = \sum_{k=u}^v \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

Logo temos

$$(B) \quad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = e^{-n_c S_c(m_c+1, \infty)},$$

onde m_c representa um numero inteiro positivo ou zero, devendo n'este ultimo caso considerar-se $e^{n_c S_c(1, m_c)}$ como representando a unidade.

Considere-se agora uma serie de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_c, \dots$, taes que a serie $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valor tão grande que seja

$$(C) \quad n_c |S_c(m_c+1, \infty)| < \varepsilon_c,$$

qualquer que seja o valor que se dê a z , o qual satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, ε represen-

⁽¹⁾ *Acta Mathematica*, tom. iv.

tando uma quantidade positiva arbitrariamente dada; o que é sempre possível, por ser n'este caso uniformemente convergente a serie $S_c(1, \infty)$. O producto $\prod E_c$, onde

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = E_c,$$

representa uma função regular em todos os pontos do plano e que se annulla nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, como vamos ver.

Consideremos para isso um ponto qualquer z_0 do plano e os pontos visinhos d'este, isto é, os pontos que satisfazem á condição $|z - z_0| < \rho$, onde ρ é uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Por ser $\lim_{c \rightarrow \infty} a_c = \infty$, é sempre possível dar a c_1 um valor tão grande que a desigualdade $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \epsilon$ seja satisfeita por todos os valores de c maiores do que c_1 , e por todos os valores de z que satisfaçam á condição $|z - z_0| < \rho$.

Por outra parte, por ser convergente a serie $\sum_1^\infty \epsilon_c$, é sempre possível dar a c_2 um valor tão grande que, dando a δ um valor tão pequeno quanto se queira, a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \epsilon_t < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de c superiores a c_2 , qualquer que seja p .

Logo as duas desigualdades precedentes são satisfeitas ao mesmo tempo pelos valores de c maiores do que a maior das quantidades c_1 e c_2 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| < \rho$,

Das desigualdades precedentes e da desigualdade (C) conclue-se que a desigualdade

$$(D) \quad \sum_{t=c}^{c+p} \left| n_t S_t(m_t + 1, \infty) \right| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de c superiores a c_1 e c_2 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| < \rho$.

Por outra parte, a fórmula (B) dá

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t(m_t + 1, \infty)},$$

d'onde se tira

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log E_t = -\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t(m_t + 1, \infty),$$

e, em virtude da desigualdade (D),

$$\left| \sum_{t=c}^{c+p} \log E_t \right| < \delta.$$

Logo a serie $\sum_{t=1}^{\infty} \log E_t$ é uniformemente convergente na região considerada do plano.

Posto isto, supponhamos primeiramente que z_0 é diferente de a_1, a_2 , etc. e que a ρ se dá um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z_0 - a_c|$, qualquer que seja c . O segundo membro da igualdade

$$\begin{aligned} \log E_c &= n_c \log \left(1 - \frac{z}{a_c} \right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k \\ &= n_c \log \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c} \right) + n_c \log \left(1 - \frac{z_0}{a_c} \right) \\ &\quad + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c} \right)^k \end{aligned}$$

é susceptível de ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, e temos ⁽¹⁾ $\log E_c = P(z - z_0)$; e portanto, applicando o theorema do n.º 163,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log E_c = P_1(z - z_0),$$

d'onde se tira

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1(z - z_0)}.$$

D'esta fórmula tira-se depois

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \dots + \frac{P_1^n(z - z_0)}{n!} + \dots$$

ou (n.º 163)

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

o que prova que a função $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto z_0 , como se queria demonstrar.

Supponhamos agora que z_0 representa uma raiz a_j da função considerada. Dando n'este

⁽¹⁾ Empregaremos, como Weierstrass, as notações $P(z - z_0)$, $P_1(z - z_0)$, etc. para representar series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - z_0$.

caso a ρ um valor tão pequeno que na área plana determinada pela condição $|z - a_j| < \rho$ não exista outra raiz da mesma função, teremos

$$\frac{\prod_1^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{P_3(z - a_j)}$$

visto que o primeiro membro não tem a raiz a_j e por isso lhe é applicavel o que vem de dizer-se; e portanto

$$\prod_1^{\infty} E_c = \frac{(-1)^{n_j}}{a_j^{n_j}} (z - a_j)^{n_j} e^{P_2(z - a_j)},$$

d'onde se conclue, como no caso anterior, que a função $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto a_j .

As raizes a_1, a_2 , etc. da função que vimos de formar, são todas diferentes de zero. Para que a função tenha tambem a raiz 0, basta multiplicar $\prod_1^{\infty} E_c$ por z^{n_0} . Com effeito, temos (n.º 25)

$$z^{n_0} \prod_1^{\infty} E_c = (z_0 + z - z_0)^{n_0} P_2(z - z_0) = P_4(z - z_0),$$

e portanto a nova função que se obtem é ainda regular em todo o plano.

De tudo o que precede conclue-se a primeira parte do theorema de Weierstrass, isto é, que se póde construir pela fórmula (1) uma função que é regular em todo o plano e que se annulla nos pontos 0, a_1, a_2 , etc.

Para demonstrar a segunda parte d'este theorema, basta notar que o quociente da função $f_1(z)$ dada pela função $f(z)$, que vimos de formar, não póde ser nullo nem infinito em ponto algum do plano. Logo este quociente representa (n.º 168-7.º) uma função $F(z)$ regular em todo o plano, que não se annulla em ponto algum.

Por ser, na visinhança do ponto z_0 ,

$$F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

onde b_0 é differente de zero, teremos

$$\log F(z) = \log b_0 + \log \left[1 + \frac{(z - z_0)[b_1 + b_2(z - z_0) + \dots]}{b_0} \right].$$

Logo, se a $|z - z_0|$ se derem valores tão pequenos que seja

$$\frac{|z - z_0| |b_1 + b_2(z - z_0) + \dots|}{|b_0|} < 1,$$

teremos, em virtude do theorema do n.º 163,

$$\log F(z) = P(z - z_0),$$

e portanto a função $\log F(z)$ é inteira. Temos pois, representando por $\varphi(z)$ esta função, $F(z) = e^{\varphi(z)}$, e portanto

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} \cdot f(z),$$

que é o que se queria demonstrar.

172. *Determinação dos factores primarios das funcções inteiras.* — A cada um dos factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c S_c}$$

que entram nas fórmulas (1) e (2), chamou Weierstrass um *factor primario* das funcções consideradas $f(z)$ e $f_1(z)$. Tanto para decompôr uma função inteira dada em factores primarios, como para achar uma função inteira que tenha raizes dadas, é necessario conhecer, para cada valor de c , um valor de m_c que satisfaça á desigualdade (C), e para isso basta, como vamos ver, dar a m_c valores taes que seja convergente a serie

$$(E) \quad \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|.$$

Com effeito, se esta serie é convergente, podemos dar a ε_c o valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|,$$

chamando λ uma quantidade independente de z e de c .

Mas, por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k \right| < \sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

e

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|}$$

TT

a desigualdade (C) póde ser substituída pela seguinte:

$$\left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|} < \varepsilon_c,$$

que é satisfeita, visto que se póde dar a λ o valor maximo $\frac{1}{1-\varepsilon}$ que toma $\frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|}$ quando é $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon < 1$.

Se houver pois um valor de m_c , constante qualquer que seja c , tal que a serie (E) seja convergente, emprega-se este valor em todos os termos das fórmulas (1) ou (2). No caso contrario, põe-se $m_c = c$; com effeito, a serie (E) transforma-se então na serie $\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{c+1}}{a_c^{c+1}} \right|$, que é convergente (n.º 22-IV), visto que a raiz $\sqrt[c]{n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^{c+1}}$ tende para zero, quando c tende para o infinito, suppondo que n_c não tende ao mesmo tempo para o infinito.

EXEMPLO. Procuremos a fôrma geral das funcções inteiras cujas raízes são $0, 1, -1, 2, -2, \dots, c, -c$, etc.

Como a serie $\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{a_c^2} \right| = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{c^2}$ é convergente, qualquer que seja z (n.º 20), podemos pôr $m_c = 1$, e temos

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{c}\right) e^{\frac{z}{c}} \left(1 + \frac{z}{c}\right) e^{-\frac{z}{c}} \right],$$

ou

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z .

Faz parte das funcções comprehendidas na fôrma precedente a funcção $\sin \pi z$. N'este caso é $e^{\varphi(z)} = \pi$ (n.º 170).

173. Fundados no que precede, podemos achar um desenvolvimento em serie da funcção $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$, em que se tornam explicitos os pontos onde esta funcção é infinita.

Derivando os logarithmos dos dois membros da fórmula (2), vem (n.º 165)

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left[\frac{n_c}{z - a_c} + \sum_{k=1}^{m_c} \frac{n_c}{a_c} \left(\frac{z}{a_c} \right)^{k-1} \right]$$

ou

$$(F) \quad \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z - a_c)},$$

visto ser

$$\frac{1}{z - a_c} = -\frac{1}{a_c} \left[1 + \frac{z}{a_c} + \dots + \left(\frac{z}{a_c} \right)^{m_c - 1} \right] + \frac{z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z - a_c)}.$$

Para completar a demonstração d'esta fórmula (F), vamos mostrar que a serie que entra no seu segundo membro é uniformemente convergente, quando a serie (E) o é também. Com effeito, por esta serie ser uniformemente convergente e por $|a_t|$ tender para o infinito com t , a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponderá um valor t_1 , tal que as desigualdades

$$\lambda \sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} + 1} \right| < \delta, \quad \left| \frac{z}{a_t} \right| < \varepsilon$$

serão satisfeitas quando $t > t_1$ e $|z| < \rho$, ρ representando uma quantidade tão grande quanto se queira. Logo teremos também

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} + 1} \right| \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|} < \delta,$$

visto que se póde dar a λ o valor $\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$; depois

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} + 1} \right| \frac{1}{1 - \frac{|z|}{a_c}} < \delta;$$

e finalmente

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z - a_c)} \right| < \delta;$$

d'onde se conclue que a serie que entra no segundo membro de (F) é uniformemente convergente em qualquer área, por maior que ella seja.

174. *Caso em que m_c é constante.* — No caso de m_c ser constante, a funcção (2) tem pro-

*

priedades notaveis, que fôram estudadas por Laguerre, Cesàro, etc. Aqui limitar-nos-hemos a demonstrar, no caso de $\varphi(z)$ ser constante e $n_0=0$, o theorema seguinte:

Se todas as raizes de $f_1(z)=0$ são reaes, também as raizes de $f_1'(z)=0$ o são.

Este theorema foi demonstrado por F. Chio nos casos de ser $m_c=0$ e $m_c=1$, e em seguida por Cesàro no caso de m_c representar uma constante qualquer ⁽¹⁾.

Seja $z_1=\rho(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$ uma qualquer das raizes da equação $f_1'(z)=0$. Substituindo este valor em logar de z na egualdade (F) e pondo $m_c=m$, vem

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \cdot \frac{n_c(\cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega)}{\rho \cos \omega - a_c + i \rho \operatorname{sen} \omega} = 0.$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes, das quaes uma determina ρ e a outra ω :

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \{ \rho \cos(m-1)\omega - a_c \cos m\omega \} &= 0, \\ \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \{ \rho \operatorname{sen}(m-1)\omega - a_c \operatorname{sen} m\omega \} &= 0, \end{aligned}$$

pondo $d_c = (\rho \cos \omega - a_c)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \omega$.

Se m é impar, multiplicando a primeira d'estas egualdades por $\operatorname{sen}(m-1)\omega$, a segunda por $\cos(m-1)\omega$ e subtrahindo membro a membro as egualdades resultantes, vem

$$\operatorname{sen} \omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c a_c^{m-1}} = 0,$$

d'onde se tira $\omega=0$.

Se m é par, multiplicando a primeira equação por $\operatorname{sen} m\omega$, a segunda por $\cos m\omega$ e subtrahindo, vem

$$\operatorname{sen} \omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c a_c^m} = 0,$$

d'onde se tira também $\omega=0$.

Logo, em qualquer dos casos, será $z_1=\rho$. As raizes de $f_1'(z)=0$ são portanto reaes, que é o que se queria demonstrar.

⁽¹⁾ *Giornale di Matematiche*, tom. xxii.

V

Funções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados

175. Das funções uniformes não inteiras, limitar-nos-hemos a estudar as que são regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados $a_1, a_2, a_3, \dots, a_c, \dots$, taes que seja $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$, e na vizinhança dos quaes tenhamos

$$(1) \quad f(z) = P(z - a_c) + G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right),$$

onde

$$(2) \quad G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) = \sum_{t=1}^m A_t \left(\frac{1}{z - a_c} \right)^t.$$

Estes pontos são os *pontos singulares* da função, e fôram chamados por Weierstrass *pólos*, quando m é finito, *pontos singulares essenciaes*, quando m é infinito.

As funções consideradas resultam naturalmente da generalização da theoria das funções racionais. Na verdade, toda a função racional $f(z)$ é susceptível da decomposição (n.º 42)

$$f(z) = \sum \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + \sum \frac{B_b}{(z - a_2)^b} + \dots;$$

se agora z_0 representar um ponto differente de a_1, a_2 , etc., temos

$$f(z) = \sum \frac{A_a}{(z_0 - a_1)^a} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_1} \right)^{-a} + \dots,$$

d'onde resulta (n.ºs 25 e 157)

$$f(z) = P(z - z_0),$$

e a função é portanto regular na vizinhança de z_0 ; se porém z_0 representa um dos pontos a_1, a_2 , etc., a_1 por exemplo, applicando a decomposição anterior só ás parcellas correspondentes a a_2, a_3 , etc., vem um resultado da fórma

$$f(z) = \sum \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + P_1(z - a_1),$$

e o ponto a_1 é portanto um pólo.

Pertencem também ao grupo de funções que estamos considerando, as funções $f_1(z)$ que são o quociente de duas funções transcendentais inteiras $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$. Com efeito, sendo $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$ as raízes do denominador e $n_1, n_2, \dots, n_c, \dots$ os seus respectivos graus de multiplicidade, a função $f_1(z)$ será regular em qualquer ponto z_0 do plano, diferente dos pontos a_1, a_2 , etc. (n.º 168-7.º); e, na vizinhança do ponto a_c , teremos (n.º 171)

$$f_1(z) = \frac{P(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c} e^{P_1(z-a_c)}} = \frac{P_2(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c}} = G_c \left(\frac{1}{z-a_c} \right) + P_3(z-a_c).$$

Logo a função considerada é regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, que são pólos.

176. Assim como acontece com as funções racionais, as funções que estamos estudando são susceptíveis de uma decomposição que torna explicitos os seus pólos e os seus pontos singulares essenciaes. Esta importante propriedade, estabelecida por Weierstrass no caso de ser finito o numero de pontos singulares da função, foi em seguida estendida por Mittag-Leffler ao caso de a função conter um numero infinito de pólos ou pontos singulares essenciaes. Antes porém de demonstrar o bello e importante theorema devido ao sabio professor da Universidade de Stockholmo, vamos considerar o caso das funções $\cot z$, $\tan z$, $\sec z$ e $\operatorname{cosec} z$, cuja decomposição em funções simples, dada por Euler na sua *Introductio in Analysin infinitorum*, se obtém de um modo muito facil e dá origem a algumas fórmulas importantes.

A fórmula (a) do n.º 170 dá

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{c^2 \pi^2} \right),$$

e, derivando relativamente a z ,

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2 \pi^2},$$

ou

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi} \right).$$

Esta fórmula dá a decomposição de $\cot z$ em fracções simples, que tornam explicitos os pólos $0, c\pi, -c\pi$ da função.

Do que precede tiram-se as seguintes consequencias.

I. Desenvolvendo o binomio que entra no segundo membro da penultima fórmula, vem

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2 \pi^2} + \frac{z^2}{c^4 \pi^4} + \frac{z^4}{c^6 \pi^6} + \dots \right),$$

quando é (n.º 157) $|z| < \pi$; e portanto, em virtude do theorema do n.º 163,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^2} - \frac{2z^3}{\pi^4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^4} - \frac{2z^5}{\pi^6} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^6} - \dots$$

Esta fórmula dá o desenvolvimento de $\cot z$ em serie ordenada segundo as potencias de z , quando é $|z| < \pi$.

II. Por ser

$$z \cot z = \frac{iz(e^{2iz} + 1)}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$

temos (n.º 107-V), representando $z \cot z$ por u ,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^nu}{dz^n}\right)_0 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2i)^n B_{n-1},$$

B_{n-1} designando os numeros de Bernoulli; e portanto, applicando a fórmula de Maclaurin,

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2 B_1}{2!} z^2 - \frac{2^4 B_3}{4!} z^4 - \frac{2^6 B_5}{6!} z^6 - \dots$$

Egualando os coefficients das potencias de grau $2m-1$ de z nos dois desenvolvimentos de $\cot z$ que vimos de obter, resulta a importante relação, descoberta por Euler⁽¹⁾ e publicada nas suas *Institutiones Calculi differentialis*,

$$\frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m-1}}{(2m)!} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^{2m}}.$$

III. Do desenvolvimento de $\cot z$ que vimos de obter, pôde tirar-se o desenvolvimento de $\tan z$, de $\sec z$ e de $\operatorname{cosec} z$ em serie ordenado segundo as potencias de z , desenvolvendo os segundos membros das fórmulas conhecidas:

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z, \quad \operatorname{cosec} z = \cot z + \tan \frac{1}{2} z, \quad \sec z = \tan z \operatorname{cosec} z;$$

e vê-se que a primeira e a terceira função são susceptíveis d'este desenvolvimento, quando é $|z| < \frac{\pi}{2}$, e a segunda, quando é $|z| < \pi$.

Das duas primeiras egualdades resultam os desenvolvimentos

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} z &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} (2^{2m} - 1) \frac{B_{2m-1}}{(2m)!} z^{2m-1}, \\ z \operatorname{cosec} z &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (2^{2m-1} - 1) \frac{B_{2m-1}}{(2m)!} z^{2m}.\end{aligned}$$

Pondo na ultima

$$\sec z = E_0 + \frac{1}{2!} E_2 z^2 + \frac{1}{4!} E_4 z^4 + \dots,$$

substituindo no seu segundo membro $\operatorname{tang} z$ e $\operatorname{cosec} z$ pelos seus desenvolvimentos, ordenando o resultado segundo as potencias de z , e egualando depois os coefficients das mesmas potencias de z nos dois membros da identidade assim obtida, vem uma serie de equações que determinam as constantes E_0, E_2, E_4 , etc. por meio dos numeros de Bernoulli.

Aos numeros E_0, E_2, E_4 , etc. dá-se o nome de *numeros de Euler*. Podem ser calculados, independentemente dos numeros de Bernoulli, por meio da egualdade

$$E_{2m} = \left(\frac{d^{2m} (\cos x)^{-1}}{dx^{2m}} \right)_{x=0},$$

que dá, applicando a fórmula (3) do n.º 105,

$$E_{2m} = \sum (-1)^i \frac{(2m)! i! \cos^{\alpha} \frac{\pi}{2} \cos^{\beta} 2 \frac{\pi}{2} \dots \cos^{\lambda} 2m \frac{\pi}{2}}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \dots (2m!)^{\lambda}},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ representam todas as soluções inteiras, positivas e nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + 5\epsilon + 6\omega + \dots + 2m\lambda = 2m,$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

ou finalmente

$$E_{2m} = \sum (-1)^{i+\beta+\omega+\dots} \frac{(2m)!}{\beta! \delta! \omega! \dots (2!)^{\beta} (4!)^{\delta} (6!)^{\omega} \dots},$$

onde δ, ω, \dots representam as soluções inteiras, positivas e nullas, da equação

$$\beta + 2\delta + 3\omega + \dots = m,$$

e onde

$$i = \beta + \delta + \omega + \dots$$

Podem ainda calcular-se os numeros considerados por meio da relação de recorrencia

$$E_{2m} - \binom{2m}{2} E_{2m-2} + \binom{2m}{4} E_{2m-4} - \dots = 0,$$

que se obtem derivando $2m$ vezes os dois membros da equação

$$y \cos z = 1$$

e notando que é $y_0^{(2m)} = E_{2m}$. Para applicar esta relação deve attender-se a que é $E_0 = 1$.

177. Consideremos ainda a função $\text{tang } z$.

Partindo da expressão de $\cos z$ dada no n.º 170, acha-se, procedendo como no numero anterior, a fórmula, devida a Euler :

$$\text{tang } z = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{z^2}{\frac{(2c+1)^2}{4} \pi^2 - z^2}$$

ou

$$\text{tang } z = \sum_{c=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\frac{2c+1}{2} \pi - z} + \frac{1}{\frac{2c+1}{2} \pi + z} \right],$$

onde estão explicitos os pólos $\frac{2c+1}{2} \pi$ e $-\frac{2c+1}{2} \pi$ da função $\text{tang } z$.

Da primeira das fórmulas precedentes resulta a seguinte :

$$\text{tang } z = \frac{8z}{\pi^2} \left[\sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{(2c+1)^2} + \frac{2^2 z^2}{\pi^2} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{(2c+1)^4} + \dots \right],$$

da qual se deduz, comparando-a com o desenvolvimento de $\text{tang } z$ precedentemente escripto, a relação

$$\frac{(2^{2m}-1)}{2(2m)!} \pi^{2m} B_{2m-1} = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{(2c+1)^{2m}}.$$

Dos desenvolvimentos de $\cot z$ e $\text{tang } z$ deduz-se, por meio da relação

$$2 \sec z = \cot \frac{1}{2} z + \text{tang } \frac{1}{2} z,$$

UU

já anteriormente empregada, o desenvolvimento

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} - \sum_{c=1}^{\infty} (-1)^c \frac{2z}{c^2 \pi^2 - z^2},$$

e d'este tira-se, mudando z em $\frac{\pi}{2} - z$, o desenvolvimento de $\sec z$:

$$\sec z = \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \frac{2c+1}{\frac{(2c+1)^2}{4} \pi^2 - z^2}.$$

Este ultimo desenvolvimento dá este outro:

$$\sec z = \frac{4}{\pi^2} \left[\sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \cdot \frac{1}{2c+1} + \frac{2^2 z^2}{\pi^2} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \cdot \frac{1}{(2c+1)^3} + \dots \right],$$

por meio do qual e de um outro desenvolvimento da mesma função, anteriormente escripto, se deduz a relação

$$\frac{\pi^{2m} E_{2m}}{2^{2(m+1)} (2m)!} = \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \cdot \frac{1}{(2c+1)^{2m+1}}.$$

178. THEOREMA DE MITTAG-LEFFLER. — *Sendo dadas as quantidades $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_c, \dots$, collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$, e sendo dadas as funcções*

$$G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \dots, G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right), \dots,$$

que são da fórmula (2), é sempre possível formar uma funcção $f(z)$ da fórmula

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z) \right],$$

que seja regular em todos os pontos do plano, diferentes de $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, e da qual estes pontos sejam pólos ou pontos singulares essenciaes.

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, que são pólos ou pontos singulares essenciaes, póde ser reduzida á fórmula

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z) \right],$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z ⁽¹⁾.

(1) Mittag-Leffler: — *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes* (Acta Mathematica, tom. iv).

Por ser uniformemente convergente a serie

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{a_c^2}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} + \dots,$$

quando z é diferente de a_c , e por ser cada termo d'esta serie susceptível de ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de z , quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, teremos, em virtude do theorema do n.º 163,

$$(A) \quad G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Consideremos agora, como no n.º 171, uma serie de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_c, \dots$, taes que a somma $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dêmos a m_c um valor tão grande que seja

$$(B) \quad \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \varepsilon_c,$$

qualquer que seja o valor que se attribua a z , que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, o que é sempre possível, por ser uniformemente convergente a serie (A) na região do plano determinada pela condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$. A somma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z), \quad F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

satisfaz ás condições do theorema enunciado, isto é, representa a função $f(z)$, como vamos ver.

Seja z_0 um ponto do plano, differente dos pontos a_1, a_2 , etc., e ρ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Por ser $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$ e por ser convergente a serie $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, é sempre possível dar a c_1 um valor tão grande que as desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \quad \sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

sejam satisfeitas ao mesmo tempo por todos os valores de c superiores a c_1 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| < \rho$, qualquer que seja p .

*

D'estas desigualdades e da desigualdade (B) conclue-se que a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t} \right)^k \right| < \delta$$

ou (form. A)

$$\sum_{t=c}^{c+p} |F_t(z)| < \delta$$

é também satisfeita pelos valores de c superiores a c_1 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leq \rho$.

Logo a serie $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é uniformemente convergente na região definida pela condição $|z - z_0| \leq \rho$.

Posto isto, como z_0 é diferente de a_c , supponhamos que se dá a ρ um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z - a_c|$. O segundo membro da igualdade

$$G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) = \sum_{t=1}^m \frac{A_t}{z_0 - a_c} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c} \right)^{-1}$$

é susceptível (n.º 163) de ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de $z - z_0$ na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leq \rho$; logo o mesmo acontece á funcção $F_c(z)$, e temos (n.º 163)

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

A funcção $\sum_1^{\infty} F_c(z)$ é pois regular no ponto z_0 .

Consideremos agora um ponto singular a_j da mesma funcção. Dando n'este caso a ρ um valor tão pequeno que na região determinada pela condição $|z - a_j| \leq \rho$ não exista outro ponto singular da funcção considerada, teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

visto que o primeiro membro não tem o ponto singular a_j ; e portanto

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j \left(\frac{1}{z - a_j} \right) + P_3(z - a_j).$$

Logo a_j é um pólo ou um ponto singular essencial da funcção $\sum F_c(z)$.

Os pontos singulares a_1, a_2 , etc. da funcção que vimos de formar, são diferentes de zero. Para que 0 seja um ponto singular da funcção, de modo que na vizinhança d'este

ponto tenhamos

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \quad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{c=1}^m \left(\frac{1}{z}\right)^c,$$

basta pôr

$$f(z) = \sum_{c=1}^m F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

Com effeito, a funcção

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z_0 \left(1 + \frac{z-z_0}{z_0}\right)}\right)$$

é (n.º 163) regular na vizinhança de qualquer ponto z_0 diferente de 0; e na vizinhança do ponto 0 a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é regular.

De tudo o que precede conclue-se que a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ tem todas as propriedades enunciadas na primeira parte do theorema de Mittag-Leffler, e representa portanto a funcção $f(z)$ que queríamos formar.

Para demonstrar a segunda parte, basta notar que a differença entre $f(z)$ e $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ não tem pontos singulares, e portanto é igual a uma funcção inteira $\varphi(z)$.

179. *Quociente de duas funcções inteiras.* — Vimos já (n.º 168-7.º) que o quociente de duas funcções inteiras é regular em todo o plano, excepto nos pontos que são raízes do denominador, os quaes são pólos (n.º 175). A estas funcções é pois applicavel o theorema de Mittag-Leffler.

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, que são pólos, é o quociente de duas funcções inteiras. Com effeito, chamando n_1, n_2 , etc. os expoentes dos factores $(z-a_1)^{n_1}, (z-a_2)^{n_2}$, etc. pelos quaes é necessario multiplicar $f_1(z)$ para fazer desaparecer os pólos, e construindo por meio do theorema de Weierstrass uma funcção inteira $\varphi_2(z)$, cujas raízes sejam a_1, a_2 , etc. com os graus de multiplicidade n_1, n_2 , etc., o producto de $f_1(z)$ por $\varphi_2(z)$ é regular em todo o plano, e representa portanto uma funcção inteira $\varphi_1(z)$.

Para um estudo mais desenvolvido da theoria das funcções analyticas, da qual nos occuparemos outra vez no Calculo integral, para expôr os methodos de Cauchy, consultem-se as obras seguintes:

Forsyth: — *Theory of Functions of a complex variable*. Cambridge, 1893; Vivanti: — *Teoria delle funzioni analitiche*, Milano, 1901.

INDICE

Introdução

CAPITULO I

Theoria dos numeros irracionais, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios.
Regras para o seu calculo

	Paginas
I — Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra.....	1-2
II — Theoria dos numeros irracionais.....	2-12
III — Numeros negativos e numeros imaginarios.....	12-20
IV — Noção de limite.....	20-32
V — Series.....	33-53
VI — Productos infinitos.....	54-60
VII — Fracções continuas.....	61-66

CAPITULO II

Principios geraes da theoria das funcções. Funcções algebricas, logarithmicas, etc.

I — Principios geraes.....	67-79
II — Funcções algebricas.....	79-88
III — Funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares.....	88-104

Calculo differencial

CAPITULO I

Noções preliminares

I — Noção de infinitamente pequeno e de derivada.....	105-109
II — Methodo dos limites, Methodo infinitesimal, Origem do Calculo infinitesimal.....	109-117

CAPITULO II

Derivadas de primeira ordem das funcções

	Paginas
I — Theoremas geraes	119-122
II — Derivada das funcções algebricas, logarithmicas, circulares, etc.	122-127
III — Relações entre as funcções e suas derivadas	127-129
IV — Funcções de muitas variaveis	130-136
V — Funcções implicitas	136-144
VI — Derivada dos determinantes, Determinantes funcçionaes.....	145-151
VII — Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva.....	151-157
VIII — Mudança das variaveis	158-162

CAPITULO III

Aplicações geometricas dos principios precedentes

I — Curvas planas	163-184
II — Curvas no espaço	184-191
III — Superficies	191-198
IV — Curvas e superficies envolventes	199-211

CAPITULO IV

Derivadas e differenciaes de ordem qualquer

I — Formação das derivadas de ordem qualquer.....	213-222
II — Aplicações	223-234
III — Relações entre as funcções e suas derivadas.....	234-239

CAPITULO V

Aplicações analyticas da fórmula de Taylor

I — Desenvolvimento em serie do binomio e de algumas funcções algebricas.....	241-247
II — Desenvolvimento em serie de algumas funcções transcendentess.....	248-252
III — Interpolação.....	252-257
IV — Desenvolvimento em serie das funcções implicitas	257-260
V — Maximos e minimos	260-268
VI — Indeterminações.....	269-273

CAPITULO VI

Aplicações geometricas da fórmula de Taylor

	Paginas
I — Curvas planas	275-295
II — Curvas no espaço	296-301
III — Superficies	301-309

CAPITULO VII

Funções definidas por series. Singularidades das funções

I — Funções definidas por series	311-314
II — Singularidades de algumas funções	314-321

CAPITULO VIII

Funções de variaveis imaginarias

I — Definições e principios geraes	323-328
II — Extensão da fórmula de Taylor ás funções de variaveis imaginarias.....	328-342
III — Funções regulares em uma região do plano.....	342-345
IV — Funções regulares em todo o plano.....	346-356
V — Funções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados	357-365

Erratas

Pag.	lin.	erro	emenda
77	24	$b'_n,$	b'_n, \dots
81	25	(z)	$f(z)$
87	22	<i>rationelles</i>	<i>rationnelles</i>
94	15	x	y
98	4	k	l
99	1	a negativa	a é negativa
139	20	$\frac{u}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial y}$
258	19	$\frac{d^2 u}{dx^3}$	$\frac{d^3 u}{dx^3}$
259	19	O_{k+2}	θ_{k+2}
268	16	primeira	segunda
319	11	$ a\ b $	ab
336	No fim do n.º 162 acrescentar as palavras seguintes:		

Da desigualdade (a) tira-se o theorema enunciado, fazendo tender δ para zero.

